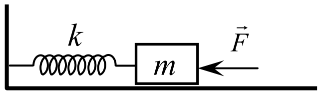
Задача. На неподвижный груз массы m = 1 кг, лежащий на горизонтальной столе и прикрепленный к стенке пружиной жёсткости k = 900 Н/м, начинает действовать постоянная горизонтальная сила F = 1 Н. Через некоторое время t действие силы прекращается. При каком времени t скорость груза будет максимальной в момент прекращения действия силы? Силами трения пренебречь.



Решение. Прежде всего, надо понять, как будет двигаться груз.

Школьник должен знать три основных типа движения (см. опорный конспект «Кинематика»):

- равномерное (по прямой и по окружности),
- движение с постоянным ускорением (по прямой или по параболе)
- гармоническое движение (когда координаты меняются по закону синуса или косинуса)

Понятно, что равномерного движения здесь не будет — груз вначале покоился, а затем его скорость менялась. Постоянного ускорения тоже не будет, т. к. сила упругости меняется по мере движения, значит, меняется и ускорение. Остается проверить, не является ли движение гармоническим — если является, то координата груза x должна подчиняться дифференциальному уравнению гармонических колебаний:

$$x''(t) = -\omega^2 x + C \qquad (1)$$

C — постоянная величина, возникающая в уравнении, если среднее за период значение колеблющейся величины не равно нулю, т. е. колебания координаты происходят не вокруг значения $x = 0$. При этом зависимость $x(t)$ имеет вид

$$x(t) = A\cos(\omega t - \varphi_0) + x_{ср} \qquad (2)$$

$x_{ср}$ — постоянная величина, вокруг которой колеблется x (среднее за период значение координаты). Формулу (1) легко получить, взяв вторую производную по времени от формулы (2). При этом окажется, что $C = \omega^2 x_{ср}$.

Запишем для груза второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальную ось OX (направим ее вправо):

$$mx''(t) = -F - k\Delta l \qquad (3)$$

Здесь учтено, что проекция ускорения есть вторая производная координаты по времени $a_x = x''(t)$, а проекция силы упругости в любой момент противоположна по знаку удлинению пружины Δl ($F_{упр\ x} = -k\Delta l$). Действительно, когда пружина растянута ($\Delta l > 0$) сила упругости направлена влево, т. е. против оси OX, а когда пружина сжата ($\Delta l < 0$) сила упругости направлена вправо и имеет положительную проекцию.

Формуле (3) можно придать вид дифференциального уравнения гармонических колебаний (1), если выбрать начало координат так, что $\Delta l = x$ (т. е. $x = 0$ в начальный момент, когда пружина не деформирована). Заменив Δl на x в формуле (3) получим:

$$x''(t) = -(k/m)x - (F/m) \qquad (4)$$

Таким образом, движение груза является гармоническими колебаниями с циклической частотой $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ и периодом $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

Максимальная скорость при гармонических колебаниях груза будет в моменты прохождения грузом положения равновесия.

В начальный момент скорость груза равна нулю, значит, начальное положение груза является амплитудным (крайним) — именно в крайних положениях при гармонических колебаниях скорость тела равна нулю.

После амплитудного положения скорость гармонически колеблющегося груза станет максимальной через четверть периода (когда груз дойдет от крайнего положения до равновесного). Затем скорость снова будет максимальной через половину периода, потом опять через половину периода и т. д.

Ответ: скорость груза будет максимальной в моменты $t = (T/4) + n(T/2)$, где число n может принимать значения $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, а $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.