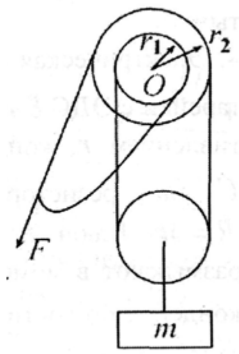
Задача. Дифференциальный блок состоит из двух скреплённых между собой и насаженных на общую горизонтальную ось O барабанов с радиусами $r_1 = 9$ см и $r_2 = 13$ см. На барабаны намотан замкнутый трос (цепь), перекинутый через подвижный блок. В устройстве обеспечены условия непроскальзывания троса по барабанам.



1) Найдите минимальную силу F, которую необходимо приложить к тросу, чтобы поднимать груз массой $m = 65$ кг.

2) За какое время этот груз достигнет скорости $v = 10$ см/с из состояния покоя, если силу F увеличить на 0,2%? Массами барабанов, троса, подвижного блока и трением в осях пренебречь.

Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Решение.

1) Чтобы установить связь между силой F и силами натяжения троса на участках AB и CD, можно использовать основной закон динамики вращательного движения или теорему о кинетической энергии. Рассмотрим оба варианта.

Основной закон динамики вращательного движения для системы, способной вращаться вокруг неподвижной оси, выражается формулой:

$$J_{\text{сист}} \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i \qquad (1)$$

где $J_{\text{сист}}$ — **момент инерции** системы материальных точек относительно оси вращения.

Момент инерции одной точки равен произведению ее массы на квадрат расстояния от этой точки до оси вращения (mr^2). А момент инерции системы — это сумма моментов инерции всех ее точек $J_{\text{сист}} = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$. Для нашей задачи важно отметить, что если система не имеет массы, то ее момент инерции равен нулю ($J_{\text{сист}} = 0$, если $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 0$)

$\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ — производная угловой скорости по времени (угловое ускорение) величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости.

$\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i$ — сумма вращающих моментов (сумма моментов внешних сил, действующих на систему).

Запишем формулу (1) для системы, состоящей из подвижного блока и фрагмента троса $ABCD$ (на рисунке 1 этот фрагмент выделен красным цветом). В условии сказано, что массой троса и подвижного блока можно пренебречь. Значит, наша система не имеет массы и ее момент инерции равен нулю ($J_{\text{сист}} = 0$). Тогда из формулы (1) получается, что сумма вращающих моментов внешних сил, действующих на эту систему равна нулю. Какие внешние силы действуют на систему?

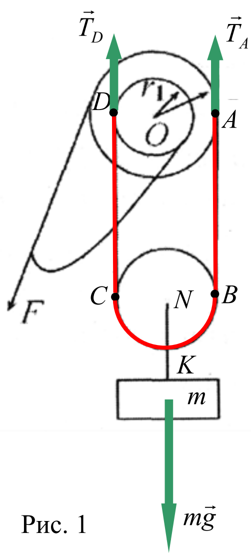


Рис. 1

- Сила натяжения нити KN, приложенная в центре подвижного блока — в точке N (вращающий момент этой силы равен нулю, т. к. линия ее действия проходит через ось вращения блока N).
- Кроме того, на систему действуют силы натяжения, приложенные к концам фрагмента троса $ABCD$ в точках A и D (T_A и T_D). Вращающие моменты этих сил направлены в противоположные стороны (T_A вращает подвижный блок против часовой стрелки, а T_D — по часовой). У этих сил одинаковые плечи относительно оси N (CN и NB) и чтобы сумма вращающих моментов этих сил оказалась равной нулю, необходимо равенство модулей T_A и T_D.

Итак, доказано, что $T_A = T_D$. Обозначим эту силу просто T.

Теперь запишем формулу (1) для другой системы, масса которой тоже равна нулю. В эту систему входят дифференциальный блок и фрагмент троса от точки A до точки D (на рисунке 2 этот фрагмент выделен красным цветом). Поскольку массами барабанов и троса по условию можно пренебречь, получаем, что момент инерции этой системы равен нулю и, значит, сумма моментов внешних сил, действующих на систему, тоже равна нулю. Перечислим внешние силы:

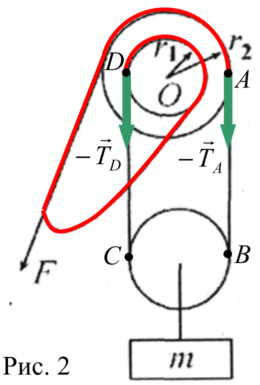


Рис. 2

- сила, действующая на блок в точке O со стороны оси, на которую этот блок насажен (у этой силы вращающий момент равен нулю);
- сила F (вращающий момент относительно оси O равен Fr_2, сила стремится повернуть систему против часовой стрелки);
- сила натяжения, действующая на трос в точке D — по III закону Ньютона она равна по модулю рассмотренной ранее силе $T_D = T$ (вращающий момент относительно оси O равен Tr_1, сила стремится повернуть систему против часовой стрелки);
- сила натяжения, действующая на трос в точке A — по III закону Ньютона она равна по модулю рассмотренной ранее силе $T_A = T$ (вращающий момент относительно оси O равен Tr_2, сила стремится повернуть систему по часовой стрелке).

Сумма вращающих моментов этих сил должна быть равна нулю, поэтому надо чтобы момент силы, вращающей систему по часовой стрелки уравновешивался моментами сил, вращающих в противоположную сторону:

$$Tr_2 = Fr_2 + Tr_1 \qquad (2)$$

Как было отмечено выше, формулу (2) можно вывести и на основе теоремы о кинетической энергии:

$\Delta E_{\text{k}} = A_{\text{всех сил}}$ — изменение кинетической энергии системы равно работе всех сил над этой системой.

Запишем эту теорему для системы, состоящей из подвижного блока и фрагмента троса BC, который лежит на блоке (рис. 3). В подвижной системе отсчета $X'NY'$, связанной с осью подвижного блока N и движущейся поступательно сила T_N не совершает работы, т. к. приложена к неподвижной точке N, $\Delta E_{\text{k}} = 0$, т. к. система не имеет массы. Таким образом:

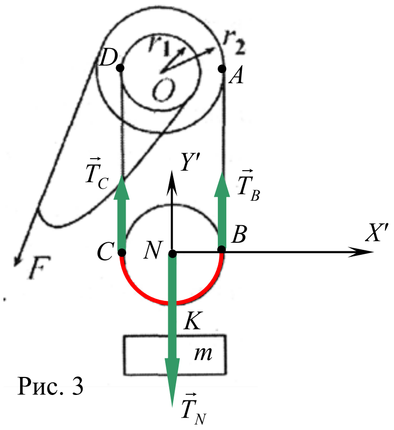


Рис. 3

$$0 = A_{\vec{T}_C} + A_{\vec{T}_B}$$

За бесконечно малое время dt подвижный блок повернется на малый угол $d\alpha$, а точки B и C пройдут малые расстояния $ds = R \cdot d\alpha$, где R — радиус подвижного блока (см. рис. 4). Получается, что работы сил, действующих на точки B и C равны

$$A_{\vec{T}_C} = -T_C \cdot ds$$

$$A_{\vec{T}_B} = T_B \cdot ds$$

$$0 = -T_C \cdot ds + T_B \cdot ds$$

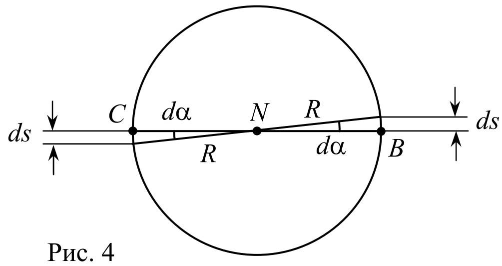


Рис. 4

Из последней формулы понятно, что $T_C = T_B$ — силы натяжения нитей DC и AB равны друг другу. Будем обозначать их T.

Теперь запишем теорему $\Delta E_{\text{k}} = A_{\text{всех сил}}$ для другой системы, масса которой тоже равна нулю. В эту систему входят дифференциальный блок и фрагмент троса от точки A до точки D (на рисунке 2 этот фрагмент выделен красным цветом). Работа силы, действующей на систему со стороны оси O, на которую насажен блок, равна нулю, т. е. точка O неподвижна. $\Delta E_{\text{k}} = 0$, т. к. система не имеет массы. Таким образом:

$$0 = A_{-\vec{T}_D} + A_{-\vec{T}_A} + A_{\vec{F}}$$

За бесконечно малое время dt дифференциальный блок повернется на малый угол $d\alpha$, а точки A, D и E пройдут малые расстояния $ds_A = r_2 \cdot d\alpha$, $ds_D = r_1 \cdot d\alpha$ и $ds_E = r_2 \cdot d\alpha$ (см. рис. 5). Получается, что работы сил, действующих на точки A и D, а также силы F равны

$$A_{-\vec{T}_A} = -T \cdot ds_A = -T \cdot r_2 \cdot d\alpha$$

$$A_{-\vec{T}_D} = T \cdot ds_D = T \cdot r_1 \cdot d\alpha$$

$$A_{\vec{F}} = F \cdot ds_E = F \cdot r_2 \cdot d\alpha$$

$$0 = T \cdot r_1 \cdot d\alpha - T \cdot r_2 \cdot d\alpha + F \cdot r_2 \cdot d\alpha$$

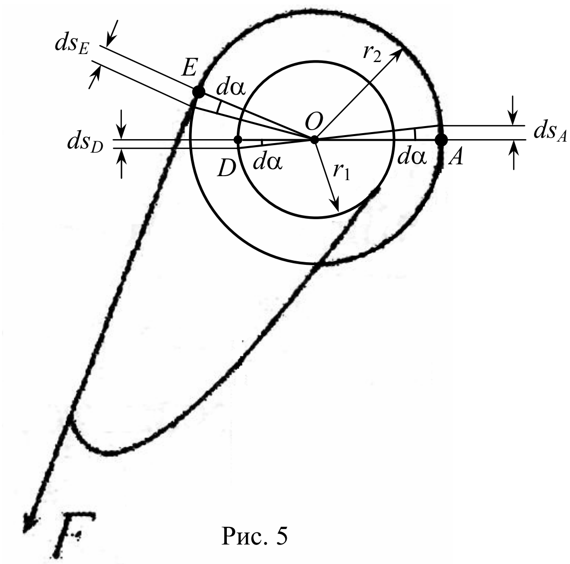


Рис. 5

Таким образом, мы снова получаем формулу (2): $Tr_2 = Fr_2 + Tr_1$

2) Если F — минимальная сила, которую необходимо приложить к тросу, чтобы поднимать груз, то груз движется равномерно и его ускорение равно нулю. Запишем теорему о движении центра масс для системы, состоящей из подвижного блока, фрагмента троса $ABCD$, нити NK и груза m в проекция на ось OY, направленную вертикально вверх:

$$0 = 2T - mg \qquad \Rightarrow \qquad T = mg/2$$

Подставив полученное значение T в формулу (2), получим ответ на первый вопрос задачи: $F = \dfrac{mg(r_2 - r_1)}{2r_2} = 100\ \text{Н}$.

3) Если силу F увеличить на 0,2 % (новое значение будет $F_2 = 1{,}002F$), то груз m будет двигаться с ускорением a, направленным вверх. Чтобы его найти запишем теорему о движении центра масс для системы, состоящей из подвижного блока, фрагмента троса $ABCD$, нити NK и груза m в проекция на ось OY, направленную вертикально вверх:

$$ma = 2T' - mg$$

Новое значение силы натяжения T' найдем из формулы (2) подставив туда $F_2 = 1{,}002F = 1{,}002\dfrac{mg(r_2 - r_1)}{2r_2}$:

$$T' = 1{,}002\frac{mg(r_2 - r_1)}{2r_2} \cdot \frac{r_2}{r_2 - r_1} = 1{,}002\frac{mg}{2} \quad \Rightarrow \; ma = 1{,}002mg - mg = 0{,}002mg \quad \Rightarrow \; a = 0{,}002g$$

Для груза, равноускоренно движущегося из состояния покоя $v = at \;\; \Rightarrow \;\; t = v/0{,}002g = 5$ с.