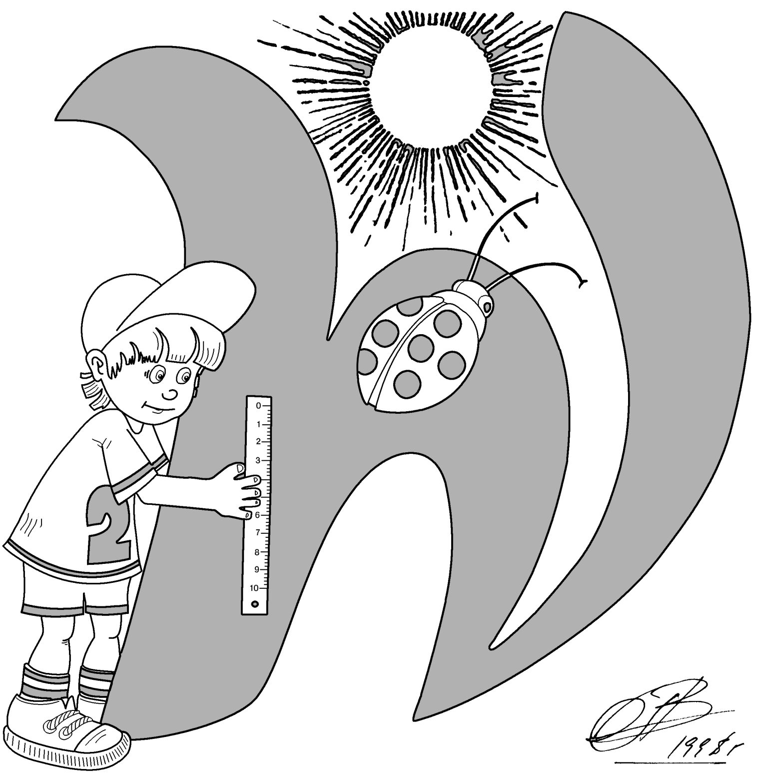
Методическая комиссия по физике
при центральном оргкомитете
Всероссийских олимпиад школьников

XLIV Всероссийская олимпиада школьников по физике

Региональный этап

Теоретический тур

Методическое пособие



МФТИ, 2009/2010 уч.г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
при центральном оргкомитете Всероссийских олимпиад школьников
Телефоны: (495) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: **physolymp@gmail.com**

Авторы задач

9 класс	**10 класс**	**11 класс**
1. Кармазин С.	1. Кармазин С.	1. Шведов О.
2. Кудряшова Н.	2. Фольклор	2. Александров Д.
3. Слободянин В.	3. Антоненко Д.	3. Слободянин В.
4. Воробьёв И.	4. Слободянин В.	4. Фольклор
5. Фольклор	5. Фольклор	5. Осин М.

Общая редакция — Ко́зел С., Слободянин В.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система $\LaTeX\,2_\varepsilon$.

Подписано в печать 29 ноября 2010 г. в 17:42.

141700, Московская область, г. Долгопрудный
Московский физико-технический институт

9 класс

Задача 1. В прачечной

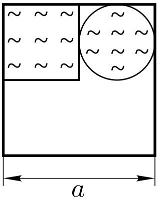


Рис. 1

Для стирки белья в квадратном душевом поддоне с размером стороны $a = 80$ см и высотой бортика $h = 20$ см хозяйка использует находящийся в поддоне частично заполненный водой и бельём квадратный тазик с размером стороны $a/2$, высотой бортика h и общей массой $m = 2{,}4$ кг. Для полоскания белья хозяйка использует находящийся в том же поддоне круглый цилиндрический тазик, полностью заполненный водой. Радиус дна тазика $R = a/4$ и высота его бортика h (рис. 1). Каким будет уровень H воды в поддоне, если вылить в него всю воду из круглого тазика? После выливания воды круглый тазик убирают из поддона. Сливное отверстие поддона закрыто пробкой.

Примечание. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3. Площадь круга вычисляется по формуле $S = \pi R^2$, где $\pi = 3{,}14$.

Задача 2. Испорченный кран

В большой комнате с температурой воздуха $t_0 = 20$ °C находится испорченный кран. Из него ежесекундно тоненькой струйкой вытекает $\mu = 0{,}1$ г воды. Вода попадает в тонкостенную металлическую раковину с квадратным сечением $a^2 = 30$ см $\times$ 30 см. Температура воды в кране $t_1 = 54$ °C. Слив раковины прикрыт так, что вода из него частично вытекает. При этом уровень воды в раковине установился на высоте $H = 10$ см, равной глубине раковины. Пренебрегая теплоёмкостью раковины и считая, что она очень хорошо проводит тепло, определите установившуюся температуру t воды в раковине. Считайте, что поток тепла q от воды в раковине пропорционален разности температур $(t - t_0)$, а также полной площади поверхности воды (включая стенки раковины). Коэффициент пропорциональности $k = 0{,}3$ Вт/(м$^2 \cdot$°C), а удельная теплоёмкость воды $c_в = 4200$ Дж/(кг $\cdot$ °C). Вода в раковине перемешивается.

Задача 3. Мелкокалиберная винтовка

Мелкокалиберную винтовку закрепили на стенде так, что её ствол оказался горизонтальным (рис. 2). После этого из винтовки начали стрелять в мишень, находящуюся от неё на расстоянии $L = 50$ м. Из-за небольшого разброса Δv скоростей пуль они попадают в мишень на разной высоте (рис. 3), причём максимальное отклонение высоты их попадания в мишень от её среднего значения составляет $\Delta h = 17$ мм. Определите максимальное отклонение Δv скорости пули от её среднего значения $v_0 = 350$ м/с.

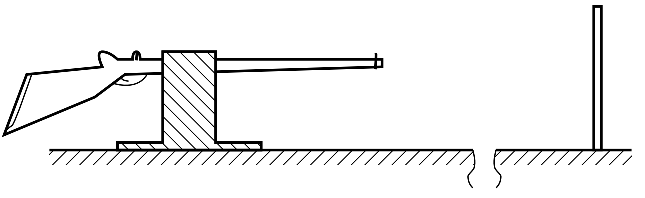


Рис. 2

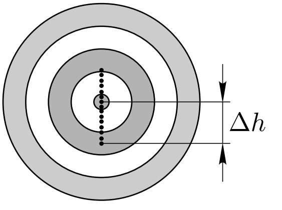


Рис. 3

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Изменение скорости пули из-за сопротивления воздуха не учитывать.

Задача 4. Очень скользкая дорога

Девятиклассник стоит на границе газона и обледеневшего участка дороги шириной L. Трение между обувью мальчика и дорогой практически отсутствует. Он решил сначала отбежать назад, а затем, разогнавшись, преодолеть скользкий участок по инерции. Коэффициент трения между обувью и газоном равен μ. Ускорение свободного падения g.

1. Какое наименьшее время T_1 потребуется мальчику, чтобы отбежать от дороги и вновь вернуться к границе обледеневшего участка, разогнавшись до скорости v_0?

2. Какое наименьшее время T от момента начала движения понадобится ему для преодоления всего скользкого участка?

Задача 5. Амперметры и вольтметры

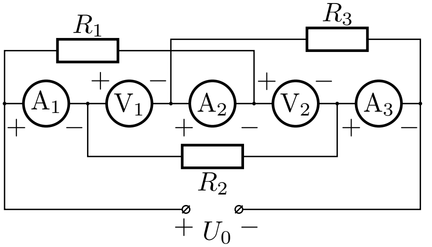


Рис. 4

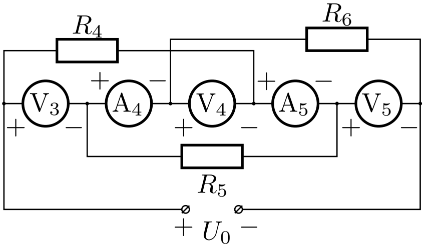


Рис. 5

У экспериментатора Глюка и теоретика Бага было 5 идеальных амперметров и 5 идеальных вольтметров. Они соединили последовательно амперметры и вольтметры, а затем подключили к ним резисторы сопротивлением $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 2$ кОм, $R_3 = 3$ кОм, $R_4 = 4$ кОм, $R_5 = 5$ кОм, $R_6 = 6$ кОм. В результате получились электрические цепи, изображённые на рисунках 4 и 5, которые подключили к источнику постоянного напряжения $U_0 = 12$ В.

1. Определите показания вольтметров V_1, V_2 и амперметров A_1, A_2, A_3 в схеме Глюка. В какую сторону отклонятся стрелки приборов (рис. 6), если при подключении их клемм, помеченных символом (+) к положительному выводу батареи, а клемм, помеченных символом (−), — к отрицательному выводу батареи, стрелка отклоняется вправо?

2. Определите показания вольтметров V_3, V_4, V_5 и амперметров A_4 и A_5 в схеме Бага. В какую сторону отклонятся стрелки в этом случае?

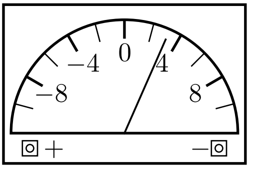


Рис. 6

10 класс

Задача 1. Про тазики

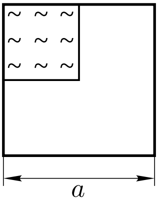


Рис. 7

Для стирки белья в квадратном душевом поддоне с размером стороны $a = 80$ см и высотой бортика $h = 20$ см хозяйка использует находящийся в поддоне частично заполненный водой и бельём квадратный тазик с размером стороны $a/2$, высотой бортика h и общей массой $m = 16$ кг (рис. 7). Для полоскания белья хозяйка использует находящийся в том же поддоне круглый цилиндрический тазик с радиусом дна R и высотой бортика h. Чему равен максимально возможный радиус R_M круглого тазика, полностью заполненного водой, если при выливании воды из него в поддон квадратный тазик не всплывёт?

После выливания воды круглый тазик убирают из поддона. Сливное отверстие поддона закрыто пробкой. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3. Площадь круга вычисляется по формуле $S = \pi R^2$, где $\pi = 3{,}14$.

Задача 2. Блоки и веревка

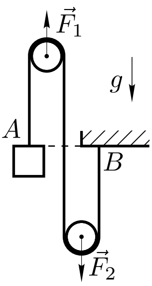


Рис. 8

Металлический куб прикреплён в точке A к тяжёлой однородной верёвке, перекинутой через два лёгких блока. Другой конец верёвки закреплён на неподвижной опоре в точке B так, что точки A и B находятся на одинаковой высоте (рис. 8). Силы $F_1 = 110$ Н и $F_2 = 90$ Н, приложенные к осям блоков, удерживают систему в равновесии. Определите длину верёвки L.

Линейная плотность верёвки (масса единицы длины) равна $\rho = 0{,}25$ кг/м, а $g = 10$ м/с^2. Трения в осях блоков нет. Радиусом блоков по сравнению с длиной верёвки пренебречь нельзя.

Задача 3. Брусочки

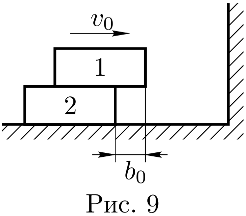


Рис. 9

Система, состоящая из двух одинаковых брусков массы m, движется с постоянной скоростью v_0 вдоль гладкой горизонтальной плоскости по направлению к вертикальной стенке. Верхний брусок смещён относительно нижнего на расстояние b_0 в направлении движения (рис. 9). Через некоторое время система сталкивается со стенкой. Соударение любого из брусков с ней можно считать абсолютно упругим. Коэффициент трения между брусками μ.

1. Определите смещение b (модуль и направление) верхнего бруска относительно нижнего после того, как прекратится взаимодействие системы брусков со стенкой, а верхний брусок перестанет скользить по нижнему.

2. С какой скоростью v_k после этого будет двигаться система?

3. В каких координатах зависимость $b(v_0)$ будет линейна? Постройте график этой зависимости в соответствующих координатах.

Задача 4. Потерянные оси

Говорят, что в архиве лорда Кельвина нашли рукопись, на которой был изображён процесс $1 \to 2 \to 3$, совершённый над одним молем гелия (рис. 10). От времени чернила выцвели, и стало невозможно разглядеть, где находятся оси p (давления) и V (объёма).

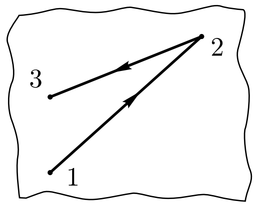


Рис. 10

Однако из текста следовало, что состояния 1 и 3 лежат на одной изохоре, соответствующей объёму V_1. Кроме того, было сказано, что количество теплоты, подведённой к газу в процессе $1 \to 2 \to 3$, равно нулю.

Определите объём V_2.

Задача 5. Мостик

Четыре резистора сопротивлениями $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 7$ Ом и $R_4 = 6$ Ом соединены с батареей (рис. 11), напряжение на которой $U_{01} = 9{,}1$ В, а её внутренним сопротивлением можно пренебречь.

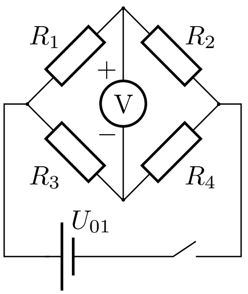


Рис. 11

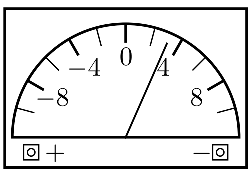


Рис. 12

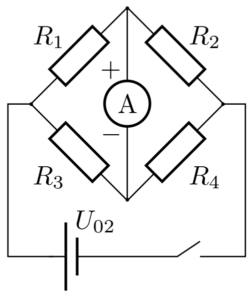


Рис. 13

1. Между резисторами подключен идеальный вольтметр. Найдите его показания. В какую сторону отклонится стрелка вольтметра (рис. 12)? Известно, что при подключении клеммы вольтметра, помеченной символом (+), к положительному выводу батареи, а клеммы вольтметра, помеченной символом (−), — к отрицательному выводу батареи, стрелка отклоняется вправо.

2. Через какое-то время батарея частично разрядилась, и напряжение на её выводах уменьшилось до $U_{02} = 9{,}0$ В. Вместо вольтметра в цепь включили амперметр (рис. 13), сопротивление которого пренебрежимо мало. Найдите показания амперметра. В какую сторону отклонится стрелка амперметра, если при протекании через него тока от клеммы, помеченной символом (+) к клемме, помеченной символом (−), стрелка отклоняется вправо?

11 класс

Задача 1. Стержень и вода

Тонкий стержень постоянного сечения состоит из двух частей. Первая из них имеет длину $l_1 = 10$ см и плотность $\rho_1 = 1{,}5$ г/см^3, вторая — плотность $\rho_2 = 0{,}5$ г/см^3 (рис. 14). При какой длине l_2 второй части стержня он будет плавать в воде (плотность $\rho_0 = 1$ г/см^3) в вертикальном положении?

Задача 2. Грузы и блоки

На гладкой горизонтальной поверхности покоится уголок массы M, который с помощью лёгкой нити и двух блоков соединён со стенкой и бруском массы m (рис. 15). Брусок касается внутренней поверхности уголка. Нити, перекинутые через блок, прикреплённый к стене, натянуты горизонтально.

Вначале систему удерживают в состоянии покоя, а затем отпускают. Найдите ускорение a уголка.

Блоки лёгкие. Трение в системе отсутствует.

Задача 3. Потерянные оси

Говорят, что в архиве лорда Кельвина нашли рукопись, на которой был изображён процесс $1 \to 2 \to 3$, совершённый над одним молем азота (рис. 16). От времени чернила выцвели, и стало невозможно разглядеть, где находятся оси p (давления) и V (объёма). Однако из текста следовало, что состояния 1 и 3 лежат на одной изохоре, а также то, что в процессах $1 \to 2$ и $2 \to 3$ объём газа изменяется на ΔV. Кроме того, было сказано, что количество теплоты, подведённой в процессе $1 \to 2 \to 3$ к N_2, равно нулю.

Определите, на каком расстоянии (в единицах объёма) от оси p (давлений) находится изохора, проходящая через точки 1 и 3.

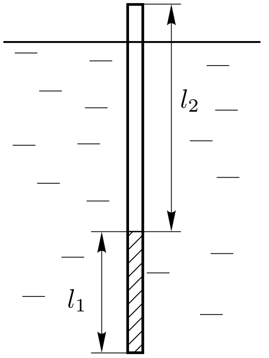


Рис. 14

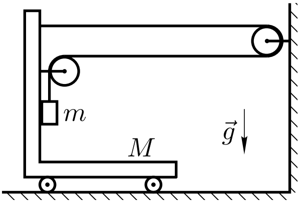


Рис. 15

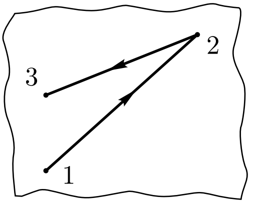


Рис. 16

Задача 4. Переменный резистор

В электрической цепи, схема которой изображена на рисунке 17, ЭДС батареек равны $3\mathscr{E}$ и $2\mathscr{E}$, а сопротивления резисторов составляют $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, а $R_x = 3R$.

На сколько процентов изменится сила тока, проходящего через амперметр, если сопротивление переменного резистора R_x увеличить на 5%?

Задача 5. Диод в колебательном контуре

Электрическая сцепь состоит из идеального источника тока с ЭДС $\mathscr{E}$, двух конденсаторов ёмкостью C и $2C$, катушки индуктивности L, сопротивлений R и r, идеального диода D и двух ключей K_1, K_2 (рис. 18). В начальный момент времени конденсаторы не заряжены, а ключи разомкнуты. Сначала замыкают ключ K_1. Найдите:

1. напряжение U_{2C}, установившееся на конденсаторе $2C$;
2. работу A, совершённую источником тока.

После того, как конденсаторы зарядятся, ключ K_1 размыкают, а ключ K_2 замыкают. Затухание в получившемся RLC–контуре мало, то есть теплота, которая выделяется на резисторе R за полпериода колебаний, намного меньше начальной энергии, запасённой в конденсаторе ёмкостью $2C$.

1. Найдите зависимость силы тока $I = I(t)$ от времени.
2. Постройте соответствующий график.
3. Определите количество теплоты Q_R, которая выделится на резисторе.
4. Вычислите установившееся напряжение U_D на диоде.

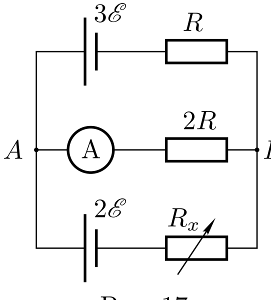


Рис. 17

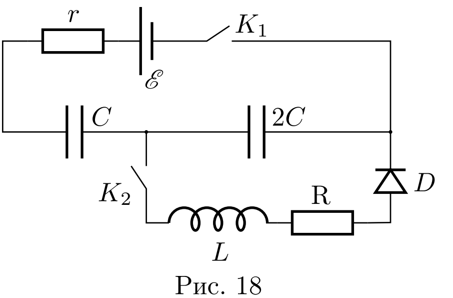


Рис. 18

Возможные решения

9 класс

Задача 1. В прачечной

Исходный объём воды в круглом тазике равен объёму воды, вылитой в поддон. Площадь поддона, не занятая квадратным тазиком, равна $3a^2/4$, таким образом, если квадратный тазик не всплывает, то уровень H_1 воды в поддоне найдём из условия:

$$\pi R^2 h = \frac{3}{4}a^2 H_1.$$

Отсюда:

$$H_1 = \frac{4\pi R^2 h}{3a^2} \approx 5{,}2 \text{ см}.$$

Теперь выясним, всплывёт ли квадратный тазик, и если всплывёт, то на какую глубину y он погрузится в воду. По закону Архимеда:

$$mg = \rho g y \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Отсюда:

$$y = \frac{4m}{\rho a^2} = 1{,}5 \text{ см}.$$

Следовательно, при выливании в поддон всей воды, содержащейся в круглом тазике, квадратный тазик всплывёт.

Сила давления на дно поддона складывается из веса тазика и веса вылитой в поддон воды $m_\text{в} g$. С другой стороны (так как на дно поддона давит только вылитая вода и никакие другие тела дна поддона не касаются), сила давления воды на дно поддона равна гидростатическому давлению слоя воды искомого уровня H_y, умноженному на площадь дна поддона.

$$mg + m_\text{в} g = \rho g a^2 H_y.$$

Масса $m_\text{в}$ вылитой в поддон воды равна объёму круглого тазика, умноженному на плотность воды, то есть $m_\text{в} = \pi R^2 h \rho$. Окончательно получим:

$$H_y = \frac{m}{\rho a^2} + \frac{\pi R^2 h}{a^2} \approx 4{,}3 \text{ см}.$$

Критерии оценивания

Найден уровень H_1 воды в поддоне (если бы квадратный таз не всплыл) . . . 3
Проверено, всплывёт ли квадратный тазик 2
Найдена глубина погружения всплывшего тазика 2

Найден уровень H_y воды в поддоне (формула) 2
Найдено численное значение H_y 1

Задача 2. Испорченный кран

Поскольку уровень воды в раковине установился, количество воды, вытекающей из крана, равно количеству воды, подтекающей из слива. По формуле Ньютона поток тепла $q = kS(t-t_0)$, где $S = 2a^2+4aH$ — площадь поверхности воды. Исходя из этого запишем уравнение теплового баланса:

$$c_{\text{в}}\mu(t_1 - t) = q, \tag{1}$$

Из (1) находим:

$$t = \frac{\mu c_{\text{в}} t_1/(kS) + t_0}{\mu c_{\text{в}}/(kS) + 1} = 48\ ^\circ\text{C}.$$

Критерии оценивания

Записано уравнение Ньютона 3
Найдено числовое значение S 1
Записано уравнение теплового баланса 3
Получено аналитическое выражение для t 2
Найдено числовое значение t 1

Задача 3. Мелкокалиберная винтовка

Для двух пуль, вылетевших со скоростями v_1 и v_2:

$$t_1 = \frac{L}{v_1}, \qquad t_2 = \frac{L}{v_2}, \qquad h_1 = \frac{gt_1^2}{2}, \qquad h_2 = \frac{gt_2^2}{2},$$

где t_1— время пролёта наиболее быстрых пуль, t_2 — наиболее медленных, а h_1 и h_2 — соответствующие смещения пуль по вертикали.

Разница высот:

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{gL^2}{2}\left(\frac{1}{v_2^2} - \frac{1}{v_1^2}\right) = \frac{gL^2}{2}\frac{(v_1+v_2)(v_1-v_2)}{v_1^2 v_2^2}. \tag{2}$$

Так как разброс скоростей пуль достаточно мал, то $v_1+v_2 \approx 2v_0$, $v_1 - v_2 = \Delta v$, откуда:

$$\Delta h \approx \frac{gL^2}{2}\cdot\frac{2v_0\Delta v}{v_0^4} = \frac{gL^2}{v_0^3}\Delta v. \tag{3}$$

Отсюда найдём:

$$\Delta v \approx \frac{v_0^3}{gL^2}\Delta h \approx 29\ \text{м/с}.$$

Задачу можно решить и точно, поскольку в (2) скорости $v_1 = v_0$, $v_2 = v_0 - \Delta v$. Тогда:

$$\Delta h = \frac{gL^2}{2}\left(\frac{1}{(v_0 - \Delta v)^2} - \frac{1}{v_0^2}\right). \tag{4}$$

Отсюда:

$$v_0 - \Delta v = \frac{1}{\frac{1}{v_0^2} - \frac{2\Delta h}{gL^2}},$$

или

$$\Delta v = v_0\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2v_0^2\Delta h}{gL^2}}} - 1\right) = 28{,}6 \text{ м/с}. \tag{5}$$

Критерии оценивания

Найдено аналитическое выражение для h_i 2
Получено аналитическое выражение (1) 2
Сделано приближение $\Delta v = (v_1 - v_2)$ и $v_0 = (v_1 + v_2)/2$, или получена формула (3) 2
Найдено выражение (2) или (4) 2
Найдено числовое значение Δv 2

Задача 4. Очень скользкая дорога

Наибольшее ускорение ученика, обусловленное трением, $a = \mu g$ как при разгоне, так и при торможении (рис. 19). На скользком участке скорость не меняется. Пусть школьник в течение времени t_1 удаляется с ускорением a от края дороги. Затем он начинает тормозить с тем же ускорением. До полной остановки уйдёт такое же время t_1. При этом он окажется на расстоянии $s = at_1^2$ от края дороги. Разгоняясь в сторону границы, он затратит ещё время t_2, чтобы вновь преодолеть расстояние s. При этом $s = at_2^2/2$. Скорость же на границе $v = at_2$.

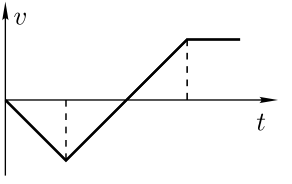


Рис. 19

Выражая t_1 через t_2, а затем t_2 через v_0, получим ответ на первый вопрос:

$$T_1 = (\sqrt{2} + 1)\frac{v_0}{\mu g}.$$

Время пересечения дороги t_3 равно:

$$t_3 = L/(at_2).$$

Полное время движения:

$$T = 2t_1 + t_2 + t_3.$$

Выражая t_1 через t_2, получим:

$$T = (\sqrt{2} + 1)t_2 + L/(at_2).$$

Наименьшее время достигается при $(\sqrt{2}+1)t_2 = L/(at_2)$, то есть при условии:

$$t_2^2 = \frac{L}{(\sqrt{2} + 1)a}.$$

Отсюда:

$$T = 2\sqrt{\frac{L(\sqrt{2} + 1)}{\mu g}}.$$

Критерии оценивания

Получено выражение для расстояния s 1
Получено выражение для времени t_2 1
Найдена связь скорости v со временем t_2 1
Получено выражение для времени T_1 2
Получено выражение для времени t_3 пересечения дороги 1
Время T выражено через t_2 1
Получено окончательное выражение для времени T 3

Задача 5. Амперметры и вольтметры

1. Для того, чтобы определить показания вольтметров в схеме Глюка, вместо амперметров изобразим участки проводника с нулевым сопротивлением (так как амперметры идеальные) (рис. 20). Получим следующую эквивалентную схему:

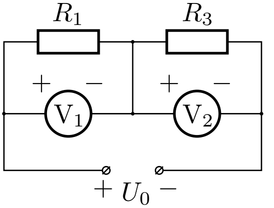


Рис. 20

Тогда показания вольтметров V_1 и V_2 будут соответственно равны:

$$U_1 = U_0\frac{R_1}{R_1 + R_3} = 3\ \text{В}, \qquad U_2 = U_0\frac{R_3}{R_1 + R_3} = 9\ \text{В}.$$

Теперь найдём показания амперметров. Для этого вместо вольтметров сделаем разрыв цепи (так как через идеальные вольтметры ток не течёт) (рис. 21). Эквивалентная схема:

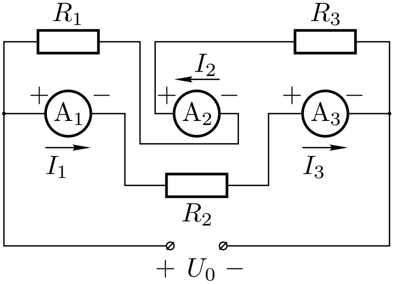


Рис. 21

Показания амперметров A_1, A_2, A_3 соответственно равны:

$$I_1 = I_3 = \frac{U_0}{R_2} = 6 \text{ мА}, \qquad I_2 = -\frac{U_0}{R_1 + R_3} = -3 \text{ мА}.$$

Отрицательная сила тока I_2 означает, что стрелка амперметра A_2 отклонится влево.

2. Аналогичным образом поступаем со схемой Бага. Эквивалентная схема для расчёта показаний вольтметров (рис. 22):

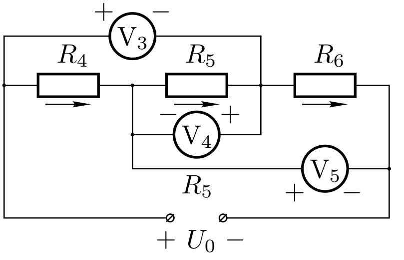


Рис. 22

Показания вольтметров равны соответственно:

$$U_3 = \frac{R_4 + R_5}{R_4 + R_5 + R_6} U_0 = 7{,}2 \text{ В},$$

$$U_4 = -\frac{R_5}{R_4 + R_5 + R_6} U_0 = -4{,}0 \text{ В},$$

$$U_5 = \frac{R_5 + R_6}{R_4 + R_5 + R_6} U_0 = 8{,}8 \text{ В}.$$

Отрицательное напряжение U_4 означает, что стрелка вольтметра V_4 отклонится влево.

Эквивалентная схема для расчета показаний амперметров (рис. 23):

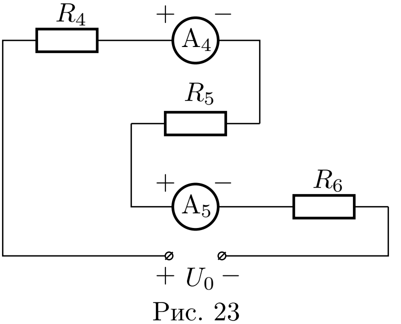


Рис. 23

Показания амперметров A_4 и A_5 равны соответственно:

$$I_4 = I_5 = \frac{U_0}{R_4 + R_5 + R_6} = 0{,}8 \text{ мА}.$$

Критерии оценивания

Найдены показания вольтметров V_1 и V_2 2
Найдены показания амперметров A_1, A_2 и A_3 3
Найдены показания вольтметров V_3, V_4 и V_5 3
Найдены показания амперметров A_4 и A_5 2

10 класс

Задача 1. Про тазики

Выясним, на какую глубину y погрузился бы в воду плавающий квадратный тазик:

$$mg = \rho\left(\frac{a^2}{4}\right)yg, \qquad \text{откуда} \qquad y = \frac{4m}{\rho a^2} = 10\ \text{см}. \qquad (6)$$

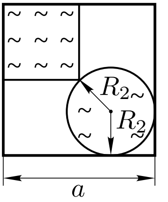


Рис. 24

Таким образом, объём вылитой из круглого тазика воды не должен превышать объем, при котором уровень воды в поддоне при не всплывающем квадратном тазике достигнет величины y:

$$\pi R_1^2 h < 3a^2 y/4. \qquad (7)$$

Подставляя y из (6) в (7), получим:

$$R_1 < \sqrt{\frac{3}{\pi}\frac{m}{\rho h}} = 27{,}6\ \text{см}.$$

Теперь проверим, тазик какого максимального радиуса R_2 можно поместить в поддоне вместе с квадратным тазиком.

Наибольший радиус круглого тазика, ещё вмещающегося в поддон с квадратным тазиком, будет в случае, если его центр расположен на диагонали поддона (рис. 24). В этом случае радиус тазика R_2 вычисляется из условия:

$$R_2 + \frac{R_2}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2},$$

откуда получаем:

$$R_2 = a\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \approx 23{,}4\ \text{см}.$$

Таким образом, максимальный радиус круглого тазика, который может использовать хозяйка, $R_M = R_2 = 23{,}4$ см.

Критерии оценивания

Найден радиус R_1 тазика, при котором квадратный тазик не всплывает 4
Найден максимальный радиус R_2 тазика, ещё вмещающийся в поддон 4
Проведено сравнение радиусов и сделан верный выбор 2

Задача 2. Блоки и веревка

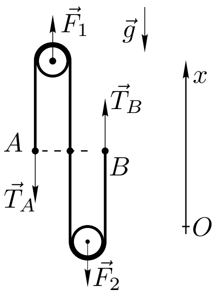


Рис. 25

Так как трения в оси верхнего блока нет, а точки A и B находятся на одном уровне, то $|\vec{T}_A| = |\vec{T}_B|$. Спроецируем на вертикальную ось OX внешние силы, действующие на тяжёлую верёвку и блоки (рис. 25):

$$-T_A + F_1 - F_2 + T_B - \rho g L = 0,$$

$$F_1 - F_2 = \rho g L,$$

откуда:

$$L = \frac{F_1 - F_2}{\rho g} = 8 \text{ м}.$$

Критерии оценивания

Записано условие равновесия для левой части системы 4
Записано условие равновесия для правой части системы 4
Найдена L 2

Задача 3. Брусочки

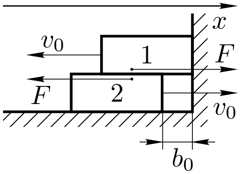


Рис. 26

Направим координатную ось Ox вдоль вектора скорости брусков. В дальнейшем все величины будем проецировать на эту ось с учётом знака.

После упругого соударения верхнего бруска со стенкой его скорость изменит знак. Силы трения, действующие на бруски, изображены на рисунке 26 (чтобы не загромождать рисунок, здесь опущены нормальные реакции опоры).

$$F = \mu m g.$$

Согласно второму закону Ньютона, ускорения брусков:

$$a_1 = F/m = \mu g, \qquad a_2 = -F/m = -\mu g.$$

Верхний брусок движется, замедляясь, влево, а нижний — замедляясь, вправо. Обратим внимание на то, что $v_2 = -v_1$. Ускорение верхнего бруска относительно нижнего:

$$a_{12} = 2\mu g.$$

Возможны два случая.

Нижний брусок остановится, не доехав до стенки (одновременно с ним остановится и верхний брусок). При этом кинетическая энергия бруска пойдёт на совершение работы против силы трения. Отсюда определим b.

$$a_{12}m(b-b_0) = 0 - \frac{m(2v_0)^2}{2}, \qquad b = b_0 - \frac{v_0^2}{\mu g}.$$

Если $mv_0^2/2 \geqslant \mu mgb_0$, то нижний брусок доедет до стенки со скоростью v_k, которую можно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_k^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - \mu g b_0 m, \qquad \text{откуда} \qquad v_k = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g b_0}.$$

После упругого столкновения бруска со стенкой его скорость сменит знак, и далее система будет двигаться с этой скоростью как одно целое.

Теперь найдем b:

$$a_{12}(b-b_0) = \frac{(2v_k)^2}{2} - \frac{(2v_0)^2}{2} = \frac{8\mu g b_0}{2}, \qquad \text{откуда} \qquad b = b_0 - \frac{8\mu g b_0}{2\cdot 2\mu g} = -b_0.$$

Таким образом:

$$b = b_0 - \frac{v_0^2}{\mu g}, \qquad \text{если} \qquad v_0 < \sqrt{2\mu g b_0},$$

$$b = -b_0, \qquad \text{если} \qquad v_0 \geqslant \sqrt{2\mu g b_0}.$$

График зависимости $b(v_0^2)$ (линейные координаты) приведён на рисунке 27:

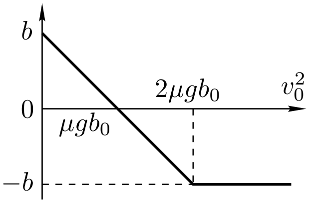


Рис. 27

Критерии оценивания

Получены выражения для a_1, a_2, v_1, v_2 с учётом знаков 2
Получено выражение для s_{12} 2
Найдено смещение b в случае $v_0 < \sqrt{2\mu g b_0}$ 2
Найдено смещение b в случае $v_0 \geqslant \sqrt{2\mu g b_0}$ 2
Построен график зависимости $b(v_0^2)$ 2

Задача 4. Потерянные оси

Внутренняя энергия газа является функцией состояния, поэтому её изменение в процессе $1 \to 2 \to 3$ равно:

$$\Delta U_{1\to2\to3} = \nu C_V(T_3 - T_1) = \frac{C_V}{R}(p_3V_3 - p_1V_1) = \frac{C_V}{R}(p_3 - p_1)V_1.$$

Работа, совершённая над газом в процессе $1 \to 2 \to 3$, численно равна площади треугольника $1 \to 2 \to 3$:

$$A_{1\to2\to3} = -\frac{(p_3 - p_1)\Delta V}{2}.$$

По первому закону термодинамики:

$$A_{1\to2\to3} + \Delta U_{1\to2\to3} = Q_{1\to2\to3} = 0.$$

Отсюда следует, что:

$$-\frac{(p_3 - p_1)\Delta V}{2} + \frac{C_V}{R}(p_3 - p_1)V_1 = 0.$$

С учётом того, что для гелия $C_V = 3R/2$, мы получаем:

$$3V_1 = \Delta V = V_2 - V_1,$$

откуда:

$$V_2 = 4V_1.$$

Критерии оценивания

Записано выражение для изменения внутренней энергии 3
Записано выражение для работы, совершённой над газом 3
Записан первый закон термодинамики 1
Найден объём V_2 3

Задача 5. Мостик

1. Введём обозначения: U_i — падение напряжения, а I_i — сила тока, проходящего через соответствующий резистор. Поскольку вольтметр идеальный, то:

$$I_1 = I_2, \tag{8}$$

$$U_1 + U_2 = U_3 + U_4 = U_{01}. \tag{9}$$

Отсюда следует:

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = I_2 = \frac{U_2}{R_2},$$

или

$$U_1 = \frac{R_1}{R_2}U_2. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (9), получим:

$$U_2 = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)}U_{01}, \qquad U_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}U_{01} = 3{,}9\ \text{В}. \tag{11}$$

Аналогичным образом:

$$U_3 = \frac{R_3}{R_3 + R_4} U_{01} = 4{,}9 \text{ В}, \qquad U_4 = \frac{R_4}{R_3 + R_4} U_{01} = 4{,}2 \text{ В}.$$

Отсюда найдём показания вольтметра:

$$U_V = U_1 - U_3 = 3{,}9 \text{ В} - 4{,}9 \text{ В} = -1 \text{ В}.$$

Знак минус означает, что стрелка отклонится влево.

2. Пусть I — сила тока, идущего через батарею. Заметим, что:

$$I = I_1 + I_3 = I_2 + I_4.$$

Поскольку сопротивление амперметра пренебрежимо мало, падение напряжения на резисторах R_1 и R_3 одинаково. Обозначим его U_1. Аналогично, падение напряжения на резисторах R_2 и R_4 обозначим U_2. Тогда:

$$I = U_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) = U_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right), \tag{12}$$

$$U_1 + U_2 = U_{02}. \tag{13}$$

Решая систему уравнений (12) и (13), получим:

$$U_1 = 4{,}2 \text{ В}, \qquad U_2 = 4{,}8 \text{ В}.$$

Предположим, что ток идёт через амперметр от (+) к (−). Тогда:

$$I_1 - I_2 = I_A \qquad \text{и} \qquad I_3 + I_A = I_4.$$

Решая любое из этих двух уравнений, например, первое, получим:

$$I_A = I_1 - I_2 = \frac{U_1}{R_1} - \frac{U_2}{R_2} = 0{,}2 \text{ А}.$$

Получившаяся сила тока положительна, следовательно, стрелка отклонится вправо.

Критерии оценивания

Установлена связь между напряжениями U_1 и U_2 или U_3 и U_4 1
Найдены напряжения U_1 и U_3 2
Найдено показание вольтметра 1
Определено направление отклонения стрелки вольтметра 1
Записано выражение для I 1
Найдены напряжения U_1 и U_2 2
Найдено показание амперметра 1
Определено направление отклонения стрелки амперметра 1

11 класс

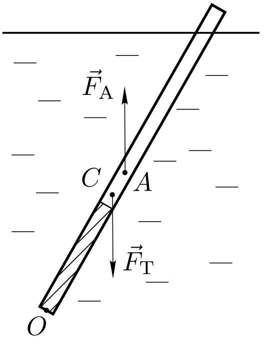


Рис. 28

Задача 1. Стержень и вода

Пусть S — площадь сечения стержня. Вес воды в объёме стержня:

$$P = \rho_0(l_1 + l_2)gS.$$

Вес стержня:

$$P_0 = (\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2)gS.$$

Стержень не будет тонуть, если $P > P_0$, откуда находим:

$$l_2 > l_1 = 10 \text{ см}.$$

Для того, чтобы стержень плавал вертикально, необходимо, чтобы при малом наклоне стержня возникал вращающий момент, стремящийся вернуть его в вертикальное положение. Это возможно, если точка приложения силы Архимеда $\vec{F}_A$ находится выше точки приложения силы тяжести $\vec{F}_T$, то есть геометрический центр A погружённой части расположен выше центра тяжести C стержня (рис. 28). Это условие можно представить в виде:

$$OA > OC. \tag{14}$$

Обозначим за L глубину подводной части стержня. Тогда:

$$L = \frac{\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2}{\rho_0} = \frac{3}{2}l_1 + \frac{1}{2}l_2,$$

$$OA = \frac{L}{2} = \frac{1}{4}(3l_1 + l_2).$$

По определению расстояние от точки O до центра масс равно:

$$OC = \frac{\rho_1 l_1(l_1/2) + \rho_2 l_2(l_1 + l_2/2)}{\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2} = \frac{3l_1^2 + 2l_1 l_2 + l_2^2}{2(3l_1 + l_2)}.$$

В этих обозначениях условие (14) примет вид:

$$(3l_1 + l_2)^2 > 2(3l_1^2 + 2l_1 l_2 + l_2^2),$$

$$3l_1^2 + 2l_1 l_2 - l_2^2 < 0.$$

С учётом того, что $l_2 > 0$, получаем ограничение сверху:

$$l_2 < 3l_1 = 30 \text{ см}.$$

Окончательный ответ:

$$10\text{ см} < l_2 < 30\text{ см}.$$

Критерии оценивания

Найдена минимальная длина l_2, при которой стержень не тонет 3
Записано условие устойчивого плавания стержня 1
Получено выражение для расстояния OA 2
Найдено расстояние от точки O до центра масс 2
Решено неравенство относительно l_2 1
Приведён окончательный ответ 1

Задача 2. Грузы и блоки

Пусть к тому моменту, когда уголок проедет расстояние l, его скорость станет равной v. Произвольная точка A на нижней части нити будет двигаться влево с той же по модулю скоростью (рис. 29).

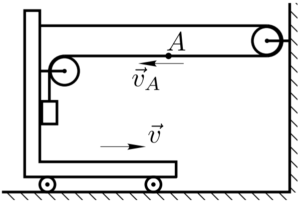


Рис. 29

В системе отсчёта, связанной с уголком, точка A и брусок будут иметь скорость $2v$. Значит, к интересующему нас моменту времени груз m опустится вниз на расстояние $2l$.

Запишем закон сохранения энергии:

$$mg \cdot 2l = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}m\left[v^2 + (2v)^2\right],$$

откуда:

$$v^2 = \frac{4mgl}{M+5m}. \tag{15}$$

Из кинематики известно, что при равноускоренном движении из состояния покоя:

$$a = \frac{v^2}{2l}. \tag{16}$$

Решая совместно уравнения (15) и (16), получим:

$$a = g \cdot \frac{2m}{M+5m}.$$

Критерии оценивания

Отмечено, что смещение уголка на l соответсвует смещению груза на $2l$ 3
Записан закон сохранения энергии или эквивалентная система уравнений Ньютона 4
Указана кинематическая связь величин a, l и v 1
Решена система и найдено ускорение a 3

Если при записи кинетической энергии груза не учтено, что он имеет горизонтальную составляющую скорости v, то за решение задачи ставить не выше 5 баллов.

Задача 3. Потерянные оси

Внутренняя энергия газа является функцией состояния, поэтому её изменение в процессе $1 \to 2 \to 3$ равно:

$$\Delta U_{1\to 2\to 3} = \nu C_V(T_3 - T_1) = \frac{C_V}{R}(p_3V_3 - p_1V_1) = \frac{C_V}{R}(p_3 - p_1)V_1.$$

Работа, совершённая над газом в процессе $1 \to 2 \to 3$, численно равна площади треугольника $1 \to 2 \to 3$:

$$A_{1\to 2\to 3} = -\frac{(p_3 - p_1)\Delta V}{2}.$$

По первому закону термодинамики:

$$A_{1\to 2\to 3} + \Delta U_{1\to 2\to 3} = Q_{1\to 2\to 3} = 0.$$

Отсюда следует, что:

$$-\frac{(p_3 - p_1)\Delta V}{2} + \frac{C_V}{R}(p_3 - p_1)V_1 = 0.$$

С учётом того, что для азота $C_V = 5R/2$, мы получаем:

$$5V_1 = \Delta V, \qquad \text{или} \qquad V_1 = \Delta V/5.$$

Это и есть искомое расстояние от оси p (давлений) до изохоры $1 \to 3$.

Критерии оценивания

Записано выражение для изменения внутренней энергии 3
Записано выражение для работы, совершённой над газом 3
Записан первый закон термодинамики 1
Найдено расстояние от оси p (давлений) до изохоры $1 \to 3$ 3

Задача 4. Переменный резистор

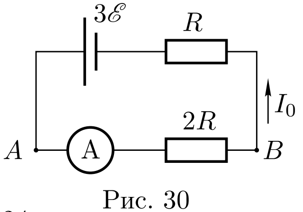


Рис. 30

Мысленно отсоединим часть цепи, содержащую батарейку с ЭДС $2\mathscr{E}$. Тогда сила тока, протекающего в оставшемся контуре (рис. 30), будет равна:

$$I_0 = \frac{3\mathscr{E}}{R + 2R} = \frac{\mathscr{E}}{R}.$$

Найдём разность потенциалов между точками A и B:

$$\varphi_A - \varphi_B = 3\mathscr{E} - I_0 R = 3\mathscr{E} - \frac{\mathscr{E}}{R}R = 2\mathscr{E}.$$

Поскольку ЭДС $2\mathscr{E}$ в точности равна разности потенциалов $(\varphi_A - \varphi_B)$, то подключение этой батареи к зажимам A и B не изменит разность потенциалов, и в этой ветви сила тока будет равна нулю:

$$(\varphi_A - \varphi_B) - 2\mathscr{E} = 0 = I_2 R_x.$$

Следовательно, изменение сопротивления резистора R_x не повлияет на силу тока, проходящего через амперметр.

Критерии оценивания

Найдена разность потенциалов $(\varphi_A - \varphi_B)$ 6
Подмечено, что $(\varphi_A - \varphi_B) = 2\mathscr{E}$ 2
Сделан вывод, что I_A не зависит от сопротивления резистора R_x 2

Задача 5. Диод в колебательном контуре

По истечению большого промежутка времени конденсаторы зарядятся до некоторых напряжений U_C, U_{2C} и ток в цепи прекратится. Запишем второе правило Кирхгофа и закон сохранения заряда:

$$\mathscr{E} = U_C + U_{2C}, \tag{17}$$

$$CU_C = 2CU_{2C}. \tag{18}$$

Отсюда получим ответ на первый вопрос:

$$U_{2C} = \frac{\mathscr{E}}{3}. \tag{19}$$

Работа источника тока равна:

$$A = \mathscr{E}\Delta q, \tag{20}$$

Так как $\Delta q = 2CU_{2C}$, то:

$$A = \mathscr{E} \cdot 2C \cdot \frac{\mathscr{E}}{3} = 2C\frac{\mathscr{E}^2}{3}. \tag{21}$$

После размыкания ключа K_1 и замыкания ключа K_2, пока диод открыт, в цепи будут происходить свободные затухающие колебания. По условию задачи энергия, которая выделяется в колебательном контуре за один период, намного меньше начальной энергии, запасённой в конденсаторе $2C$, следовательно можно считать, что за первый полупериод колебания гармонические, то есть сила тока в цепи изменяется по закону:

$$I = I_a \sin \omega t, \tag{22}$$

Так как затухания малы:

$$\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{2LC}.$$

Найдём амплитуду I_a. По закону сохранения энергии:

$$\frac{2CU_{2C}^2}{2} = \frac{LI_a^2}{2}. \tag{23}$$

Из равенств (19) и (23) получим:

$$I_a = \mathscr{E}\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{2C}{L}} = \frac{2}{3}\mathscr{E}\sqrt{\frac{C}{L}}. \tag{24}$$

После одного полупериода, когда сила тока в цепи обратится в ноль, напряжение на диоде станет отрицательным и диод закроется, поэтому ток в цепи прекратится. Запишем аналитически зависимость силы тока от времени:

$$I = I_a \sin \omega t \qquad \text{при} \qquad t \leqslant T/2,$$

$$I = 0 \qquad \text{при} \qquad t \geqslant T/2.$$

Построим график зависимости силы тока I в цепи от времени t, учитывая, что затухания малы (рис. 31).

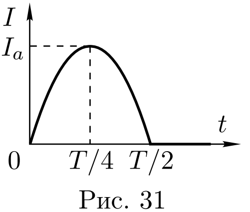


Рис. 31

Зная зависимость силы тока от времени, найдём количество теплоты, которая выделится на катушке индуктивности:

$$Q_L = \int\limits_0^{T/2} I^2 R dt = I_a^2 R \int\limits_0^{T/2} (\sin \omega t)^2 dt = I_a^2 R \cdot \frac{T}{4}, \tag{25}$$

$$T \approx 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{2LC}.$$

Подставив (24) в (25), получим:

$$Q_L = I_a^2 R \cdot T/4 = \mathscr{E}^2 \frac{2}{9}\frac{C}{L} R \frac{2\pi\sqrt{2LC}}{4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{9}\sqrt{\frac{C^3}{L}} R\mathscr{E}^2.$$

В установившемся режиме падение напряжения на диоде будет равно напряжениию на конденсаторе, но с противоположным знаком, то есть:

$$U_D = -U_{2C(\text{уст})} \approx -\frac{\mathscr{E}}{3}.$$

Критерии оценивания

Найдено выражение для напряжения на конденсаторе 2C 2
Найдено выражение для работы батареи 2
Найдено амплитудное значение I_a силы тока 1
Найдена зависимость силы тока в цепи от времени 1
Построен график зависимости силы тока от времени 1
Найдено выражение для количества теплоты Q_R 2
Найдено конечное напряжение U_D на диоде 1