Методическая комиссия по физике
при центральном оргкомитете
Всероссийских олимпиад школьников

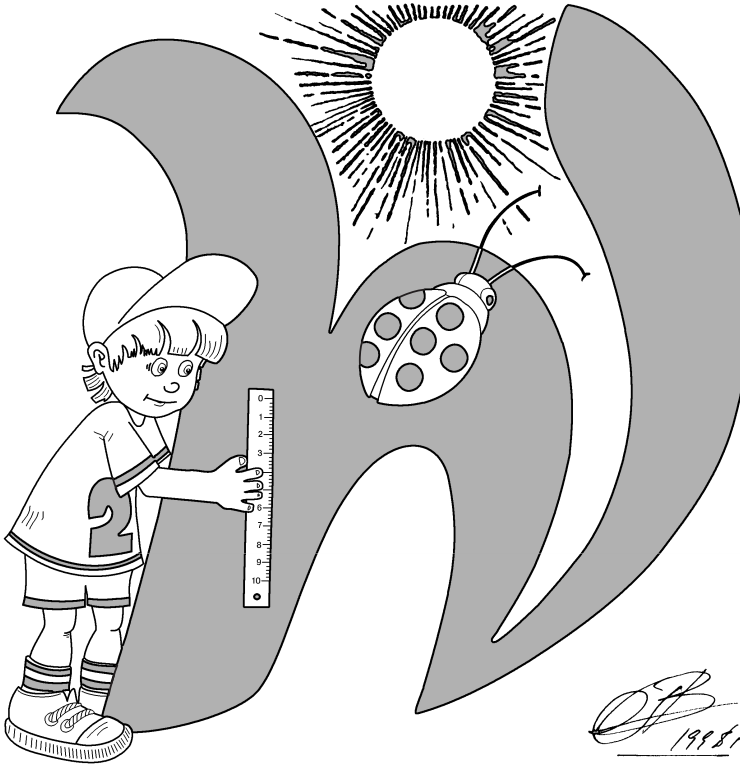
# XLIV Всероссийская олимпиада школьников по физике

## Региональный этап

### Теоретический тур

### 9, 10 и 11 классы

Методическое пособие




МФТИ, 2009/2010 уч.г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
при центральном оргкомитете Всероссийских олимпиад школьников
Телефоны: (495) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: **physolymp@gmail.com**

## Авторы задач

| 9 класс | 10 класс | 11 класс |
|---|---|---|
| 1. Слободянин В. | 1. Фольклор | 1. Слободянин В. |
| 2. Ко́зел С. | 2. Фольклор | 2. Замятнин М. |
| 3. Русаков А. | 3. Слободянин В. | 3. Шеронов А. |
| 4. Гаврилов М. | 4. Фольклор | 4. Слободянин В. |
| 5. Белонучкин В. | 5. Кармазин С. | 5. Кудряшова Н. |

Общая редакция — Ко́зел С., Слободянин В.

Оформление и вёрстка — Ерофеев И., Сметнёв Д., Матвеев Х.,
Кудряшова Н., Кузнецов И., Старков Г., Землянов В.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система LaTeX $2_\varepsilon$.

Подписано в печать 13 декабря 2009 г. в 19:26.

141700, Московская область, г. Долгопрудный
Московский физико-технический институт

# 9 класс

## Задача 1. Плот и катер

От пристани «Дубки» экспериментатор Глюк отправился в путешествие по реке на плоту. Ровно через час он причалил к пристани «Грибки», где обнаружил, что забыл свой рюкзак на пристани в «Дубках».

К счастью, Глюк увидел на берегу своего друга — теоретика Бага, у которого была моторная лодка. На ней друзья поплыли обратно, забрали рюкзак и вернулись в «Грибки».

Сколько времени моторная лодка плыла против течения, если всё плавание заняло 32 минуты?

Мотор лодки в течение всего плавания работал на полную мощность, а время, которое потребовалось на подбор рюкзака, пренебрежимо мало.

## Задача 2. Линейная теплоёмкость

Теплоёмкость некоторых материалов может зависеть от температуры. Рассмотрим брусок массы $m_1 = 1$ кг, изготовленный из материала, удельная теплоёмкость которого зависит от температуры $t$ по закону:

$$c = c_1(1 + \alpha t),$$

где $c_1 = 1{,}4 \cdot 10^3$ Дж/(кг·°C), $\alpha = 0{,}014\ ^\circ\mathrm{C}^{-1}$. Такой брусок, нагретый до температуры $t_1 = 100$ °C, опускают в калориметр, в котором находится некоторая масса $m_2$ воды при температуре $t_2 = 20$ °C. После установления теплового равновесия температура в калориметре оказалась равной $t_0 = 60$ °C.

Пренебрегая теплоёмкостью калориметра и тепловыми потерями, определите массу $m_2$ воды в калориметре. Известно, что удельная теплоёмкость воды $c_2 = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · °C).

## Задача 3. Цепь с двумя амперметрами

В электрической цепи (рис. 1) сила тока, проходящего через резистор $R_3$, равна 1 мА. Сопротивления резисторов $R_1 = 1$ кОм, $R_3 = 3$ кОм.

Перерисуйте рисунок 1 в свою тетрадь и укажите на нём направления токов, идущих через резисторы. Чему равно напряжение $U$ батарейки? На сколько миллиампер отличаются показания амперметров $A_1$ и $A_2$? Амперметры считайте идеальными.

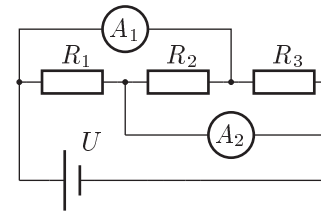



Рис. 1

## Задача 4. На киностудии

При съёмке художественного фильма потребовалось заснять эпизод с падением вагонов поезда с моста в реку. Для этого был построен макет железной дороги, моста и вагонов в масштабе 1 : 50. С какой частотой кадров $N_1$ необходимо снимать этот эпизод, чтобы при просмотре кадров со стандартной частотой $N_0 = 24$ кадра/с ситуация выглядела правдоподобно?

## Задача 5. Два зеркала

Перед системой зеркал $M_1$ и $M_2$ расположена буква Ь так, как показано на рисунке 2. Постройте на том же рисунке все изображения, даваемые этой системой. Докажите, что других изображений быть не может. Длина каждого из зеркал равна расстоянию между ними.

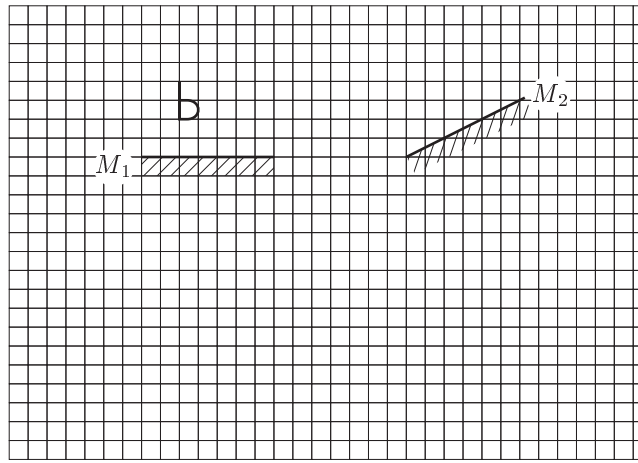



Рис. 2

# 10 класс

## Задача 1. «Абсолютно» упругий удар

Доска массы $M$ и длины $L$ скользит с некоторой скоростью $v_0$ по гладкой горизонтальной поверхности. На левом краю доски лежит кубик массы $m$. Коэффициент трения скольжения между кубиком и доской равен $\mu$.

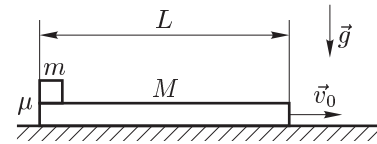



Рис. 3

Доска испытывает абсолютно упругий удар о вертикальную стенку (рис. 3). При какой максимальной скорости $v_0 = v_{\max}$ доски кубик с неё не упадёт? Размерами кубика по сравнению с $L$ пренебречь. В процессе всего движения кубик не опрокидывается.

## Задача 2. Электростатическое взаимодействие

Определите модуль силы электростатического отталкивания двух маленьких заряженных шариков одинаковой массы $m$. Один из них висит на нити длины $L$, другой — на нити длины $2L$. Угол между нитями равен 60° (рис. 4).

## Задача 3. Процесс с идеальным газом

Идеальный газ в количестве $\nu$ моль участвует в процессе $AB$, изображённом на рисунке 5 в координатах $\rho(T)$, где $\rho$ — плотность газа, а $T$ — его температура. При каких условиях (температуре) давление газа на 25% меньше максимального? Температура $T_0$ известна.

## Задача 4. «Сферический» резистор

Из трёх проволок, каждая из которых имеет сопротивление $R = 96$ Ом, сделали три кольца и соединили их так, что длина участка между любыми двумя ближайшими узлами одинакова (рис. 6). Чему равно сопротивление $R_{AB}$ конструкции между узлами $A$ и $B$?

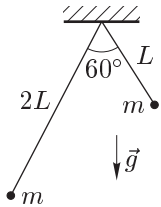



Рис. 4

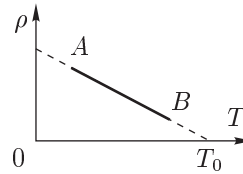



Рис. 5

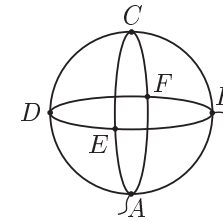



Рис. 6

## Задача 5. Полость в стене

Таблица 1

| $V$, л | $p$, кПа |
|---|---|
| 1,0 | 100 |
| 0,8 | 110 |
| 0,6 | 130 |
| 0,4 | 150 |
| 0,2 | 175 |

В толстой бетонной стене была обнаружена внутренняя полость. Для определения её объёма в стене просверлили тонкое отверстие, соединяющее полость с атмосферой. Через это отверстие тонким шлангом полость герметично соединили с поршневым насосом и манометром (рис. 7). В начальном состоянии поршень насоса находился в верхнем положении, а давление в системе насос–полость равнялось атмосферному. Затем была исследована зависимость давления в системе от объёма воздуха в насосе $p(V)$. Полученные экспериментальные результаты представлены в таблице 1.

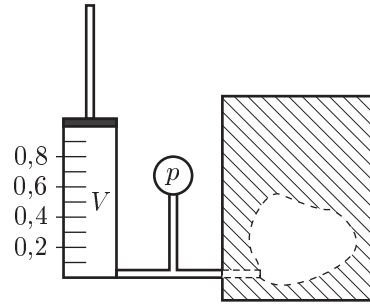



Рис. 7

Путём графического анализа результатов эксперимента, определите объём внутренней полости. Погрешность измерения давления в данном эксперименте составляла 3%. Погрешностью определения объёма под поршнем насоса можно пренебречь. Уменьшение объёма насоса производилось квазистатически, то есть настолько медленно, что температуру воздуха в системе насос–полость на протяжении всего эксперимента можно считать равной температуре окружающей среды.

# 11 класс

## Задача 1. Груз на горке

Слева направо по гладкой плоскости скользит тяжёлая горка массы $M$, на вершине которой покоится лёгкий груз массы $m$ (рис. 8). Кинетическая энергия $K_1$ груза в четыре раза меньше его потенциальной энергии П. Груз съезжает с горки без трения. Найдите его кинетическую энергию $K_2$, когда он окажется на плоскости. Считайте, что П = 1 Дж, а $M \gg m$.

## Задача 2. Нарушение равновесия

Некто провёл серию экспериментов по исследованию устойчивости системы, изображённой на рисунке 9.

Из бункера, расположенного на высоте $H$ над выступающим краем однородной доски, лежащей на двух опорах, сразу после открывания заслонки начинает высыпаться песок с массовым расходом $\mu$ кг/с. Расстояние между опорами составляет 2/3 от длины доски. Система устроена так, что попадая в лёгкую чашу, закреплённую на краю доски, песок там и остаётся.

Экспериментатор заметил, что в первом опыте край доски оторвался от опоры $B$ спустя время $\tau_1 = 1{,}00$ с после открывания заслонки. После этого экспериментатор вдвое уменьшил массовый расход песка и обнаружил, что доска снова оторвалась от опоры $B$ спустя время $\tau_1$. В третий раз он уменьшил расход вчетверо по сравнению с первоначальным, и доска оторвалась от опоры $B$ уже спустя время $\tau_2 = 1{,}75$ с.

Зная, что масса доски $M = 700$ г, определите высоту $H$, с которой падал песок, и массовый расход $\mu$ песка в первом эксперименте.

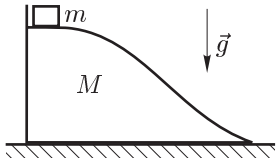



Рис. 8

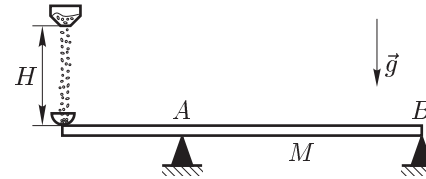



Рис. 9

## Задача 3. Цепь с конденсатором

Электрическая схема (рис. 10) состоит из источника постоянного тока с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением $r$, конденсатора ёмкостью $C$ и резистора $R$. В начальный момент конденсатор не заряжен.

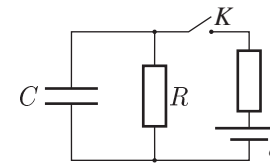



Рис. 10

Ключ $K$ в схеме сначала замыкают, а затем размыкают в тот момент, когда скорость изменения энергии, запасённой в конденсаторе, достигает максимума. Какое количество теплоты выделится в схеме после размыкания ключа?

## Задача 4. Призма на воде

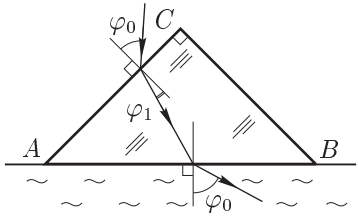



Рис. 11

Поверхности воды касается равнобедренная стеклянная призма $ABC$ (рис. 11). Луч света, падающий из воздуха под углом $\varphi_0$ на грань $AC$, после прохождения призмы выходит через грань $AB$ под тем же углом $\varphi_0$. Чему равен угол преломления $\varphi_1$?

Показатель преломления воды $n_0 = 4/3$, угол $C$ при вершине призмы — прямой. Величина угла $\varphi_0$ неизвестна.

## Задача 5. Термодинамический «лабиринт»

Над 1 моль метана ($CH_4$) совершается процесс, график которого изображён на рисунке 12. Перенесите график процесса в тетрадь и выделите на нём участки, на которых к газу подводится теплота. Какое количество теплоты было подведено к газу в этом процессе? $p_0$ и $V_0$ считать известными.

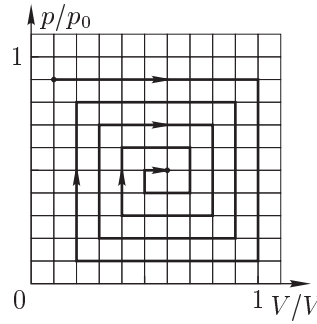



Рис. 12

# Возможные решения

## 9 класс

### Задача 1. Плот и катер

Пусть скорость течения реки $u$. Тогда расстояние от «Дубков» до «Грибков» равно $L = ut_0$, где $t_0$ — время плавания на плоте.

Пусть скорость моторной лодки относительно воды равна $v$. Тогда время $t_1$, затраченное на движение от «Грибков» до «Дубков», равно:

$$t_1 = \frac{L}{v-u} = t_0\frac{u}{v-u}.$$

На обратный путь потребовалось время $t_2 = \dfrac{L}{v+u} = t_0\dfrac{u}{v+u}$.

Всё время плавания на лодке оказалось равным $t_{12} = t_1 + t_2 = t_0\dfrac{2vu}{v^2-u^2}$.

Выразим скорость моторной лодки через скорость течения реки, решив квадратное уравнение относительно $v$:

$$v^2 - 2\frac{t_0}{t_{12}}uv - u^2 = 0, \qquad \text{отсюда} \qquad v = u\cdot\left[\left(\frac{t_0}{t_{12}}\right) + \sqrt{1+\left(\frac{t_0}{t_{12}}\right)^2}\right].$$

Искомое время $t_1 = t_0\dfrac{u}{v-u} = \dfrac{t_0 t_{12}}{t_0 - t_{12} + \sqrt{t_{12}^2 + t_0^2}} = 20$ минут.

*Примерные критерии оценивания*

Записано выражение для $t_1$ ..... 1
Записано выражение для $t_2$ ..... 1
Записано выражение для $t_{12}$ ..... 1
Составлено квадратное уравнение ..... 2
Выбран правильный знак для $v$ ..... 1
Получена зависимость $v(u)$ ..... 2
Найдено время $t_1$ ..... 2

### Задача 2. Линейная теплоёмкость

Построим график зависимости удельной теплоёмкости материала бруска от температуры (рис. 13). На оси абсцисс отмечены точки $t_1$, $t_2$ и $t_0$. За время теплообмена с водой в калориметре температура бруска понизилась с $t_1$ до $t_0$. При этом брусок передал воде количество теплоты, численно равное площади заштрихованной поверхности, умноженной на массу бруска $m_1 = 1$ кг. Запишем уравнение теплового баланса:

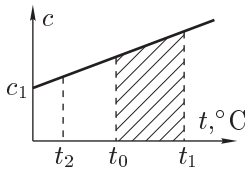


Рис. 13

$$m_2c_2(t_0 - t_2) = m_1c_1\left(\frac{1+\alpha t_1 + 1 + \alpha t_0}{2}\right)(t_1 - t_0).$$

Из этого соотношения находим:

$$m_2 = m_1 \frac{c_1}{2c_2} \frac{\alpha(t_1^2 - t_0^2) + 2(t_1 - t_0)}{t_0 - t_2} \approx 0{,}707 \text{ кг}.$$

*Примерные критерии оценивания*

Определено количество теплоты, переданное бруском ..... 4
Определено количество теплоты, полученное водой ..... 2
Записано уравнение теплового баланса ..... 1
Найдено выражение для $m_2$ ..... 1
Получено численное значение для $m_2$ ..... 2

## Задача 3. Цепь с двумя амперметрами

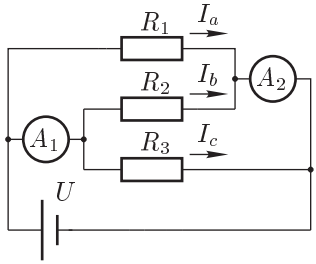


Рис. 14

Перерисуем исходную схему (рис. 14). Через резисторы ток течёт от положительного полюса батарейки к отрицательному. По условию оба амперметра идеальные. Следовательно, все три резистора соединены параллельно и подключены к полюсам батарейки. Поэтому:

$$U = I_c R_3 = 3 \text{ В}, \qquad \text{а} \qquad I_a = \frac{U}{R_1} = 3 \text{ мА}.$$

Для сил токов, протекающих через амперметры, справедливы соотношения:

$$I_a + I_b = I_2, \tag{1}$$

$$I_c + I_b = I_1. \tag{2}$$

Вычитая почленно уравнение (2) из уравнения (1), находим ответ на второй вопрос задачи:

$$I_2 - I_1 = I_a - I_c = 2 \text{ мА}.$$

*Примерные критерии оценивания*

Указаны направления токов ..... 2
Найдено напряжение $U$ ..... 2
Записана система уравнений для сил токов $I_1$ и $I_2$ ..... 3
Найдена разница $I_2 - I_1$ ..... 3

## Задача 4. На киностудии

Пусть реальный поезд падает с высоты $h$, тогда высота падения макета равна $h/50$. Обозначим через $t_{\text{н}}$ и $t_{\text{м}}$ времена падения настоящего поезда и макета.

Падение и оригинала, и макета происходит с одним и тем же ускорением, равным ускорению свободного падения. Так как время свободного падения с высоты $h$ пропорционально корню из $h$, то для времён $t_{\text{н}}$ и $t_{\text{м}}$ выполнено соотношение:

$$\frac{t_{\text{н}}}{t_{\text{м}}} = \sqrt{\frac{h}{h/50}}.$$

Чтобы ситуация выглядела правдоподобно, за время падения оригинала и макета должно быть отснято одинаковое количество кадров. Отсюда:

$$N_0 t_{\text{н}} = N_1 t_{\text{м}},$$

поэтому, используя предыдущее выражение, окончательно находим:

$$N_1 = \sqrt{50} N_0 \approx 170 \text{ кадров/с}.$$

*Примерные критерии оценивания*

Найдено отношение времён падения . . . . . 4
Записано соотношение между полным числом кадров для поезда и макета . 4
Получен численный ответ . . . . . 2

## Задача 5. Два зеркала

Два изображения строятся сразу. Это изображение $S_1$ в зеркале $M_1$ и $S_2$ в зеркале $M_2$ (рис. 15). Теперь проверим, могут ли появиться другие изображения.

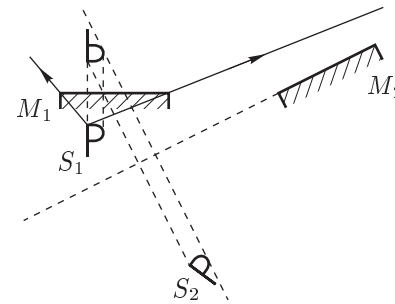


Рис. 15

$S_2$ оказывается за отражающей поверхностью обоих зеркал, а поэтому не может дать нового изображения.

Найдём область, из которой видно изображение $S_1$. Для этого проведём лучи, выходящие из $S_1$ и проходящие через края зеркала $M_1$. Изображение будет видно из точек, расположенных между лучами с рабочей стороны зеркала $M_1$. Самым широким раствор угла «видимости» изображения $S_1$ будет между лучами, выходящими из самой верхней точки изображения.

Из построения определяем, что зеркало $M_2$ в эту область не попадает ни для одной из точек изображения. Значит, $S_1$ не даёт нового изображения в $M_2$. Итак, в системе есть всего два изображения.

*Примерные критерии оценивания*

Построено изображение в зеркале $M_1$ . . . . . 3
Построено изображение в зеркале $M_2$ . . . . . 3
Показано, что изображение $S_1$ не отражается в зеркале $M_2$ . . . . . 4

## 10 класс

### Задача 1. «Абсолютно» упругий удар

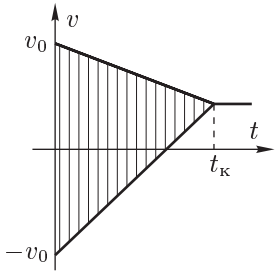



Рис. 16

Сразу после удара о стенку доска изменит направление движения на противоположенное, а кубик продолжит движение к стенке. Сила трения скольжения вызовет изменение как скорости кубика, так и скорости доски. Уравнение движения для кубика и доски:

$$v_к = -v_0 + \mu g t,$$
$$M a_д = F_{тр} = \mu m g, \qquad \text{откуда} \qquad a_д = \mu g m/M.$$

Следовательно, скорость доски $v_д = v_0 - \mu g t m/M$.

Проскальзывание прекратится после того, как скорости доски и кубика сравняются (рис. 16):

$$v_0 - \mu g \frac{m}{M} t_к = -v_0 + \mu g t_к, \qquad \text{откуда} \qquad t_к = \frac{2v_0}{\mu g}\frac{M}{(M+m)}.$$

Максимальное перемещение кубика относительно доски равно $L$. Из рисунка видно, что оно численно равно площади заштрихованного треугольника:

$$L = \frac{1}{2} \cdot 2v_0 \cdot t_к,$$

то есть максимальная скорость, при которой кубик не упадёт с доски:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{\mu g L}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right)}.$$

*Примерные критерии оценивания*

Найдено выражение для $v_к$ ..... 1
Найдено выражение для $v_д$ ..... 2
Записано условие прекращения относительного проскальзывания ..... 1
Найдено время скольжения ..... 1
Найдена связь $L$ с $v_0$ и $t_к$ ..... 3
Найдена скорость $v_{max}$ ..... 2

### Задача 2. Электростатическое взаимодействие

Рассмотрим $\triangle ABC$. В нём $\angle BAC = 60°$ (рис. 17). Поскольку $AB = 2AC$, то это прямоугольный треугольник, в котором $\angle ACB = 90°$. Пусть угол между вертикалью $AD$ и нитью $AC$ равен $\alpha$. Тогда:

$$F = mg\sin\alpha. \tag{3}$$

Выберем в качестве полюса точку $A$.

Согласно правилу моментов:

$$mg \cdot 2L\sin(60^\circ - \alpha) = mg \cdot L\sin\alpha.$$

Отсюда $\cos\alpha = \dfrac{2\sin\alpha}{\sqrt{3}}$, а $\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{3}{7}} \approx 0{,}65$.

Из (3) получаем ответ:

$$F = 0{,}65mg.$$

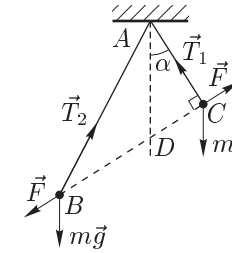



Рис. 17

*Примерные критерии оценивания*

Показано, что $\angle ACB$ прямой ..... 1
Найдена связь между $F$, $\alpha$ и $mg$ ..... 2
Применено правило моментов относительно точки $A$ ..... 3
Получено выражение, из которого можно найти угол $\alpha$ ..... 2
Найдена сила $F$ ..... 2

## Задача 3. Процесс с идеальным газом

Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона в виде:

$$p = \frac{R}{\mu}\rho T, \tag{4}$$

где $p$ — давление газа. Если обозначить $t = T/T_0$, а $\rho_0$ — максимальная плотность газа, то уравнение рассматриваемого процесса примет вид:

$$\rho = \rho_0\,(1 - t)\,, \qquad \text{откуда} \qquad p = \rho_0 T_0 \frac{R}{\mu}(t - t^2). \tag{5}$$

Исследуем на максимум выражение (5). Это квадратный многочлен относительно $t$, представляющий из себя уравнение параболы, ветви которой направлены вниз, и его значение достигает максимума в вершине параболы, то есть при $t = 1/2$. Отсюда находим максимальное давление:

$$p_{\max} = \frac{1}{4}\frac{R}{\mu}\rho_0 T_0. \tag{6}$$

С учётом (6) уравнение (5) принимает вид:

$$\frac{p}{p_{\max}} = 4(t - t^2).$$

В задаче требуется найти условия, когда $p/p_{\max} = 3/4$. Решая уравнение, находим, что $T/T_0 = 1/2 \pm 1/4$. Таким образом, условию задачи удовлетворяют два значения температуры:

$$T_1 = \frac{1}{4}T_0 \qquad \text{и} \qquad T_2 = \frac{3}{4}T_0.$$

*Примерные критерии оценивания*

Записано уравнение Менделеева-Клапейрона ..... 1
Записано уравнение изображённого процесса ..... 2
Найдена зависимость $p(T)$ ..... 2
Найдено выражение для $p_{\max}$ ..... 2
Записано квадратное уравнение относительно $(T/T_0)$ ..... 1
Решено квадратное уравнение ..... 2

## Задача 4. «Сферический» резистор

Подключим к узлам $A$ и $B$ батарейку. Сопротивление участка проволоки между двумя ближайшими узлами $r = R/4$. В силу симметрии цепи относительно плоскости, в которой лежит кольцо $ABCD$, точки $E$ и $F$ можно соединить между собой. При этом сопротивление $R_{AB}$ не изменится. Нарисуем эквивалентную схему получившейся цепи (рис. 18).

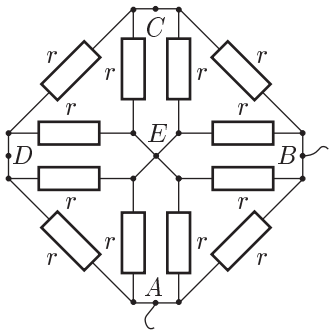



Рис. 18

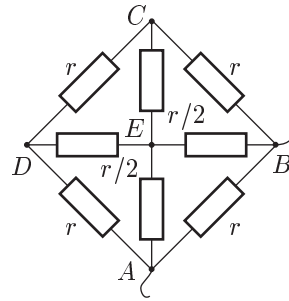



Рис. 19

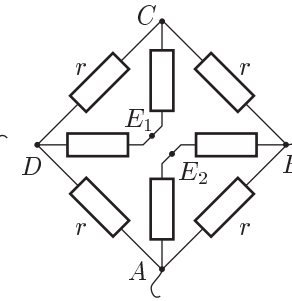



Рис. 20

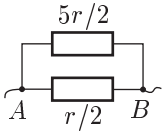



Рис. 21

Если узел $E$ (рис. 19) разъединить так, как показано на рисунке 20, то сопротивление $R_{AB}$ не изменится, потому что после разъединения $E$ напряжение на участке $E_1E_2$ будет равно нулю в силу симметрии. Теперь легко вычислить сопротивление отдельных участков:

$$R_{CD} = r/2, \qquad R_{ADCB} = 5r/2.$$

Эквивалентная схема изображена на рисунке 21. Сопротивление получившейся цепи $R_{AB} = 5r/12 = 5R/48 = 10$ Ом.

*Примерные критерии оценивания*

Показано, что точки $E$ и $F$ можно соединить ..... 3
Схема приведена к упрощённому виду ..... 2
Приведена идея разъединения узла $E$ ..... 3
Вычислено $R_{AB}$ ..... 2

## Задача 5. Полость в стене

Пусть объём полости равен $V_0$. Тогда из уравнения состояния:

$$p(V + V_0) = C = \text{const}\,, \qquad \text{или} \qquad V = \frac{C}{p} - V_0,$$

так как температура воздуха по условию задачи постоянна. Если построить график в координатах $(p^{-1}, V)$, то он должен представлять из себя прямую линию (рис. 22).

Таблица 1

| $p^{-1}$, МПа$^{-1}$ | $\Delta p^{-1}$, МПа$^{-1}$ |
|---|---|
| 10,0 | 0,3 |
| 9,1 | 0,3 |
| 7,7 | 0,2 |
| 6,7 | 0,2 |
| 5,7 | 0,2 |

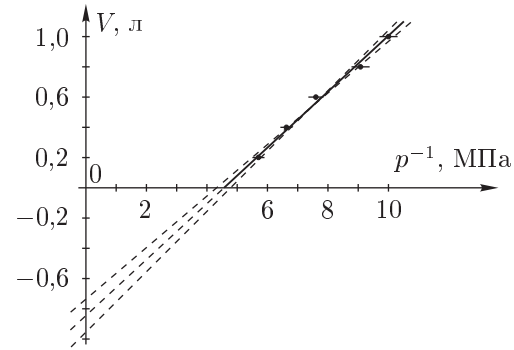



Рис. 22

Значения для построения графика приведены в таблице 1. Заметим, что удобнее строить график зависимости $V(p^{-1})$, а не $p(V^{-1})$, так как мы пытаемся определить объём. Это уменьшит погрешность его определения и облегчит обработку результатов.

Оценим погрешность $p^{-1}$:

$$\Delta p^{-1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \Delta p} = \frac{\Delta p}{p(p + \Delta p)} \approx \frac{\Delta p}{p^2} \approx \frac{\varepsilon_p}{p},$$

где $\varepsilon_p = 3\%$ — относительная погрешность измерения давления.

Отложим на графике экспериментальные точки. Проведём через них прямые с наименьшим и наибольшим возможным наклоном. Так мы получим значения $V_{\min}$ и $V_{\max}$, соответствующие пересечению графика с осью $V$. Из этих значений оценим погрешность $\Delta V \approx (V_{\max} - V_{\min})/2$.

В итоге получаем ответ $V_0 = (0{,}82 \pm 0{,}05)$ л.

*Примерные критерии оценивания*

Записано уравнение состояния . . . . . 2

Построение графика:

Если построен график $V(p)$ или $p(V)$ (нелинейный) . . . . . 1

Если построен график $V(1/p)$ или $p(1/V)$ (линейный) . . . . . 4

Определён $V_0$ . . . . . 2

Оценена погрешность определения $V_0$ . . . . . 2

# 11 класс

## Задача 1. Груз на горке

Пусть скорость системы в начальном состоянии $v_0$, высота горки $H$. Запишем закон сохранения энергии и закон сохранения импульса для системы груз–горка:

$$mgH + (m+M)\frac{v_0^2}{2} = M\frac{v_1^2}{2} + m\frac{v_2^2}{2}, \tag{7}$$

$$(m+M)v_0 = Mv_1 + mv_2, \tag{8}$$

где $v_1$ — скорость горки после соскальзывания груза, $v_2$ — скорость соскользнувшего груза.

Поскольку нас не интересует конечная скорость горки, то исключим из уравнений (7) и (8) скорость $v_1$, в результате чего получим:

$$v_2^2 - 2v_0v_2 + v_0^2 - 2gH\left(\frac{M}{m+M}\right) = 0.$$

Так как по условию задачи $v_2 > v_0$, то запишем:

$$v_2 = v_0 + \sqrt{2gH\left(\frac{M}{m+M}\right)}. \tag{9}$$

Теперь учтём, что $m \ll M$. В этом случае уравнение (9) упростится:

$$v_2 = v_0 + \sqrt{2gH}.$$

Кинетическая энергия груза, съехавшего с горки, равна:

$$\text{К}_2 = \frac{mv_2^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + mgH + mv_0\sqrt{2gH}. \tag{10}$$

По условию $\Pi = 4\text{К}_1$, откуда следует, что:

$$v_0 = \sqrt{\frac{gH}{2}}. \tag{11}$$

После подстановки (11) в (10) окончательно имеем:

$$\text{К}_2 = \text{К}_1 + \Pi + mgH = 2{,}25\Pi = 2{,}25 \text{ Дж}.$$

*Примерные критерии оценивания*

Записан закон сохранения энергии . . . . . 1
Записан закон сохранения импульса . . . . . 1
Решена полученная из них система уравнений . . . . . 3

Учтено, что $m \ll M$ ..... 1
Найдена скорость $v_2$ ..... 1
Получено выражение для $K_2$ ..... 2
Получен численный ответ ..... 1

## Задача 2. Нарушение равновесия

Согласно правилу моментов относительно полюса $A$ правый край доски оторвётся от опоры $B$ в момент, когда сила, действующая на левый край доски, станет равной:

$$F = Mg/2. \tag{12}$$

Эта сила складывается из двух составляющих — статической и динамической.

Пока песок летит, он не действует на доску. Время его падения от заслонки бункера до доски равно $\tau = \sqrt{2H/g}$. Зато потом на доску начинает действовать постоянная динамическая составляющая силы:

$$F_{\text{д}i} = \mu_i v,$$

где $v = \sqrt{2gH}$ — скорость песка перед падением на доску, $\mu_i$ — массовый расход песка в $i$-м опыте.

В то же время постепенно начинает расти статическая составляющая силы:

$$F_{\text{с}i} = \mu_i (t - \tau) g,$$

возникающая за счёт увеличения массы песка на доске. Поэтому в момент времени $t > \tau$ суммарная сила, действующая на доску со стороны песка, равна:

$$F_i = F_{\text{д}i} + F_{\text{с}i} = \mu_i g t, \tag{13}$$

причём время $t$ отсчитывается от момента открытия заслонки бункера.

Теперь рассмотрим результаты эксперимента. Так как в первых двух опытах время не зависит от расхода песка, то $\tau_1 = \tau = \sqrt{2H/g}$, откуда высота падения песка:

$$H = g\tau_1^2/2 = 5 \text{ м}.$$

Уменьшение массового расхода в 4 раза приводит к тому, что динамической составляющей уже не хватает для начала опрокидывания доски. Тогда, используя (13) и (12), находим массовый расход песка в первом эксперименте:

$$\mu = \frac{M}{2\tau} = 0{,}2 \text{ кг/с}.$$

*Примерные критерии оценивания*

Из правила моментов найдено условие отрыва доски ..... 2
Записана связь между $H$ и $\tau$ ..... 1

Рассмотрены динамическая и статическая силы давления песка . . . . . 2
Найдена высота $H$ . . . . . 1
Показано, что $F_д + F_с = \mu_i g t$ . . . . . 2
Получено выражение для $\mu$ . . . . . 1
Найдено численное значение $\mu$ . . . . . 1

## Задача 3. Цепь с конденсатором

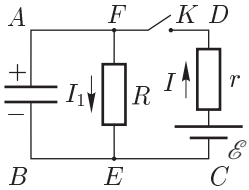


Рис. 23

Энергия, запасённая в конденсаторе, $W = q^2/(2C)$, где $q$ — заряд на обкладках конденсатора, а $C$ — ёмкость конденсатора.

Дифференцируя выражение для энергии по времени, получим:

$$\frac{dW}{dt} = P = UI_C.$$

Запишем второе правило Кирхгофа для контура $ABCD$ (рис. 23), обозначая через $I$ силу тока, текущего через резистор $r$:

$$Ir + U = \mathscr{E}, \qquad \text{откуда} \qquad I = (\mathscr{E} - U)/r. \tag{14}$$

Применяя второе правило для контура $ABEF$, получим:

$$U = (I - I_C)R, \tag{15}$$

где учтено, что сила тока, текущего через резистор $R$, равна $I_R = I - I_C$. Подставим в (15) выражение из (14). Тогда:

$$I_C = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathscr{E}R - U(R + r)}{Rr}.$$

Исследуем на максимум произведение $Udq/dt = U(\mathscr{E}/r) - U^2(R + r)/(Rr)$. Это квадратный многочлен, представляющий из себя уравнение параболы, ветви которой направлены вниз. Его значение достигает максимума в вершине параболы, то есть при:

$$U = \frac{R}{2(R + r)}\mathscr{E}.$$

Такое же напряжение будет на конденсаторе в момент размыкания ключа. Тогда количество теплоты, выделившееся в цепи после размыкания ключа, равно:

$$Q = W = \frac{CU^2}{2} = \frac{C\mathscr{E}^2}{8}\left(\frac{R}{R + r}\right)^2.$$

*Примерные критерии оценивания*

Найдено выражение для $\Delta W/\Delta t$ через $U$ и $I_C$ . . . . . 1

Определено значение $I$ . . . . . 2
Записано второе правило Кирхгофа для контура $ABEF$ . . . . . 1
Получен квадратный многочлен для $\Delta W/\Delta t$ . . . . . 2
Квадратный многочлен исследован на максимум . . . . . 2
Найдено выделившееся количество теплоты . . . . . 2

## Задача 4. Призма на воде

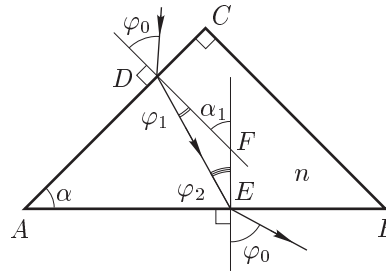



Рис. 24

Пусть показатель преломления стекла равен $n$. Выполним рисунок, поясняющий ход луча (рис. 24). Запишем закон Снелла для луча, преломляющегося на гранях $AC$ и $AB$:

$$\text{для грани } AC: \quad \sin\varphi_0 = n\sin\varphi_1; \tag{16}$$

$$\text{для грани } AB: \quad n_0\sin\varphi_0 = n\sin\varphi_2. \tag{17}$$

Разделим почленно уравнение (17) на уравнение (16):

$$n_0 = \frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1}.$$

Так как призма равнобедренная и прямоугольная, то угол $\alpha = 45°$. Для треугольника $DEF$ угол $\alpha_1$ — внешний. По теореме о внешнем угле треугольника:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \alpha_1.$$

Заметим, что углы $\alpha$ и $\alpha_1$ равны как углы со взаимно перендикулярными сторонами. С учётом двух последних соотношений получим:

$$n_0 = \frac{\sin(\alpha - \varphi_1)}{\sin\varphi_1} = \frac{\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1}{\sqrt{2}\sin\varphi_1} = \frac{1 - \operatorname{tg}\varphi_1}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\varphi_1}.$$

Подставив в уравнение значение $n_0$, окончательно получим:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{3}{4\sqrt{2}+3} \approx 0{,}347,$$

откуда следует, что $\varphi_1 \approx 19{,}1°$.

*Примерные критерии оценивания*

Записан закон Снелла для границы $AC$ ..... 2
Записан закон Снелла для границы $AB$ ..... 2
Выражен показатель $n_0$ через $\varphi_1$ и $\varphi_2$ ..... 1
Найдена связь между $\varphi_1$ и $\varphi_2$ ..... 1
Показатель преломления $n_0$ выражен через $\varphi_1$ ..... 2
Найден угол $\varphi_1$ ..... 2

## Задача 5. Термодинамический «лабиринт»

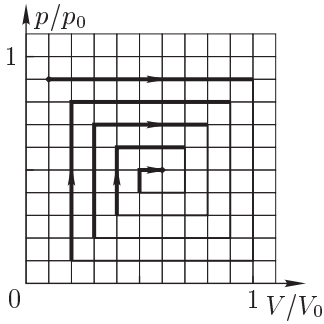



Рис. 25

Теплота подводится к газу на тех изохорах и изобарах, на которых температура возрастает. Обозначим эти участки жирными линиями (рис. 25). Вычислим суммарную работу, совершённую на этих участках, как сумму площадей под выделенными горизонтальными прямыми:

$$\frac{A}{p_0V_0} = \frac{9\cdot 9 + 8\cdot 7 + 7\cdot 5 + 6\cdot 3 + 5\cdot 1}{100},$$

откуда $A = 1{,}95\,p_0V_0$.

Так как метан — многоатомный газ, то его молярная теплоёмкость при постоянном объёме равна $C_V = 3R$. Вычислим изменение внутренней энергии на тех участках, где тепло подводится к газу:

$$\frac{\Delta U}{3p_0V_0} = \frac{1}{100}\Big((10\cdot 9 - 1\cdot 9) + (9\cdot 8 - 2\cdot 1) + (8\cdot 7 - 3\cdot 2) + \\ + (7\cdot 6 - 4\cdot 3) + (6\cdot 5 - 5\cdot 4)\Big) = 2{,}41,$$

откуда $\Delta U = 7{,}23\,p_0V_0$. Тогда подведённое тепло:

$$Q = \Delta U + A = 9{,}18\,p_0V_0.$$

*Примерные критерии оценивания*

Указаны участки, на которых тепло подводится к газу ..... 2
Вычислена работа на этих участках ..... 3
Определено изменение внутренней энергии ..... 4
Записан верный ответ ..... 1