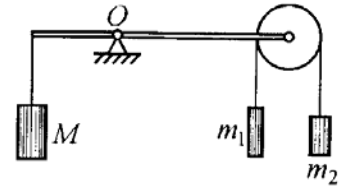


I. МЕХАНИКА

1.1. Из трубки пескоструйного аппарата мелкий песок выбрасывается вертикально вниз со скоростью, модуль которой равен $v_0 = 3$ м/с. На каком расстоянии h от конца трубки плотность струи песка уменьшится в $n = 2$ раза? Влиянием воздуха на движение песчинок пренебречь. Площадь поперечного сечения струи песка считать постоянной. Ответ: $\approx 1,38$ м.

1.2. На пол лифта, движущегося вертикально вверх относительно Земли с постоянной скоростью v , падает маленький шарик. Скорость шарика относительно Земли непосредственно перед ударом направлена вертикально вниз и равна v_0 . Найти максимальное удаление шарика от пола лифта при дальнейшем движении, считая удар шарика о пол абсолютно упругим. Влиянием воздуха пренебречь. Ответ: $H = (v_0 + v)^2 / 2g$

1.3. К одному концу жесткого стержня на нерастяжимой нити подвешен груз массой M , а на другом конце закреплен блок (см. рис.). Стержень может свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку O , находящуюся от точки подвешивания груза M на расстоянии, равном $1/3$ длины стержня. Через блок перекинута гладкая нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы с неизвестными массами m_1 и m_2 такими, что $m_1 + m_2 = M$. Грузы удерживают так, что стержень располагается горизонтально. В некоторый момент все грузы одновременно отпускают. При этом стержень остается



неподвижным. Найти массу второго груза. Массами нитей, стержня и блока пренебречь. Ответ: $m_2 = \frac{(2 \pm \sqrt{2})M}{4}$

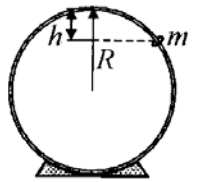
1.4. На гладком горизонтальном столе лежат, касаясь боковыми гранями, два одинаковых кубика. Длина ребра кубика равна L , а его масса M . Кубики скреплены друг с другом горизонтальным гвоздем массой m . Гвоздь вбит в правый кубик так, что проходит через его центр масс и достигает центра масс левого кубика. К правому кубику приложили постоянную горизонтальную силу F , в результате чего кубики начали поступательно двигаться по столу вправо. Через время x после начала движения гвоздь выскочил из левого кубика. Найти силу трения, действовавшую со стороны гвоздя на левый кубик, считая ее

постоянной. Влиянием воздуха пренебречь. Ответ: $f = \frac{M}{2M + m} \left(F - \frac{(m + M)L}{\tau^2} \right)$, при $F > \frac{(m + M)L}{\tau^2}$; при $F < \frac{(m + M)L}{\tau^2}$ нет

решения.

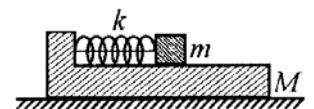
1.5. Вокруг Земли по круговым орбитам, лежащим в одной плоскости, движутся в одну сторону два спутника. Модуль скорости первого спутника равен $v_1 = 7,6$ км/с, второго — $v_2 = 7,8$ км/с. В некоторый момент расстояние между спутниками стало минимальным. Через какой минимальный промежуток времени Δt спутники вновь окажутся на этом расстоянии? Радиус Земли считать равным $R_3 = 6,4 \cdot 10^3$ км, а первую космическую скорость для Земли $v_3 = 7,9$ км/с. Ответ: ≈ 20 ч.

1.6. Небольшое колечко массой m надето на тонкий гладкий обруч радиусом R , закрепленный так, что его плоскость вертикальна (см. рис.). Колечко начинает скользить вниз из верхней точки обруча без начальной скорости. Найти зависимость значения силы давления F колечка на обруч от высоты h , на которую опустилось колечко. Ответ: $F_r = mg(3h/R - 1)$, F_r — проекция силы F на направление к центру обруча.



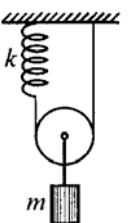
1.7. Горящая цилиндрическая парафиновая свеча плавает в воде, налитой в цилиндрический стакан. Она горит так, что парафин сгорает, не стекая вниз. Длина свечи уменьшается с постоянной скоростью, модуль которой равен u . Свечу слегка поддерживают так, чтобы ее ось оставалась вертикальной. Найти модуль v скорости, с которой уровень воды движется относительно стакана во время горения свечи. Площадь поперечного сечения свечи равна s , а стакана — S . Плотность воды равна ρ_w , а парафина — ρ_n . Ответ: $v = s\rho_n u / (S\rho_w)$

1.8. На гладком горизонтальном столе лежит ступенчатый брусок массой M . На нем находится кубик массой m , прикрепленный легкой пружиной жесткостью k к бруску (см. рис.). Коэффициент трения кубика о брусок равен μ . Пружина сжата на величину L нитью. Ось пружины и нить совпадают с горизонтальной прямой, проходящей через центр масс кубика. Найти максимальную величину скорости бруска относительно стола после пережигания нити. Кубик все время находится на бруске. Влиянием

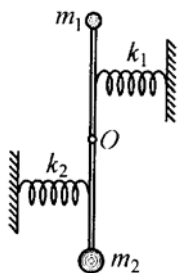


воздуха пренебречь. Ответ: Если $kL > \mu mg$, то $u_{\max} = (kL - \mu mg) \sqrt{\frac{m}{kM(m + M)}}$; если $kL \leq \mu mg$, то $u_{\max} = 0$

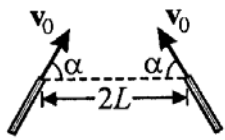
1.9. К оси блока на жестком стержне подвешен груз. Общая масса блока, стержня и груза равна m . Блок подвешен на нерастяжимой легкой нити, один конец которой непосредственно прикреплен к потолку, а другой — через невесомую пружину жесткостью k , как показано на рисунке. Отрезки нити, не лежащие на блоке, и ось пружины вертикальны. Определить возможные амплитуды гармонических вертикальных колебаний груза. Действием всех сил трения пренебречь. Ответ: $A \leq mg/(4k)$



1.10. На неизвестной планете к неподвижному штативу на тонкой легкой нерастяжимой нити длиной L подвешен небольшой свинцовый груз. Если этот груз заставить совершать колебания в вертикальной плоскости, при которых максимальное отклонение нити от вертикали будет равно некоторому углу α_0 , то отношение максимального значения натяжения нити к минимальному будет равно n . Если же этот груз привести в движение по окружности радиусом $L \sin \alpha_0$, то период его обращения будет равен T . Пренебрегая сопротивлением движению груза, найти модуль g ускорения свободного падения на этой планете в месте проведения опыта. Ответ: $g = 12\pi^2 L / ((n + 2)T^2)$

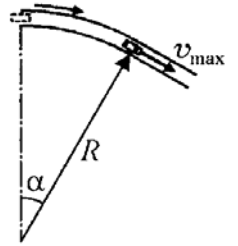


1.11. На концах легкого стержня длиной $4L$, свободно вращающегося вокруг горизонтальной оси O , проходящей через его середину, закреплены небольшие грузы массами m_1 и m_2 , причем $m_1 < m_2$. На расстояниях L от оси к стержню прикреплены пружины жесткостями k_1 и k_2 так, как показано на рисунке. В положении устойчивого равновесия стержень занимает вертикальное положение, пружины не деформированы, а их оси горизонтальны и лежат в одной вертикальной плоскости со стержнем. Найти период гармонических колебаний стержня. Ответ: $T = 4\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k_1 + k_2 + 2g(m_2 - m_1)/L}}$



1.12. Из двух тонких труб установленных в одной вертикальной плоскости, как показано на рисунке, вытекает вода со скоростью v_0 . Выходные отверстия труб находятся на одной горизонтали. Расстояние между выходными отверстиями труб равно $2L$, где $L < v_0^2/g$, а g — модуль ускорения свободного падения. При каком значении угла α точка пересечения струй воды будет находиться на максимально возможной высоте? Влиянием воздуха пренебречь. Ответ: $\alpha = \arctg(v_0^2/(gL))$

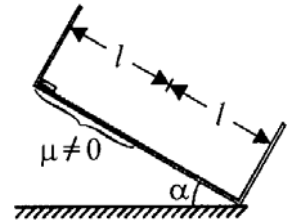
1.13. Горизонтальный участок шоссе представляет собой дугу окружности радиусом $R = 100$ м с центральным углом $\alpha = 30^\circ$, переходящую в прямолинейный отрезок (см. рис.). Автомобиль со всеми ведущими колесами, стоявший в начале криволинейного участка, начинает разгоняться с постоянным тангенциальным ускорением. С какой максимальной по модулю скоростью $v_{\max}$ может выехать автомобиль на прямолинейный участок, если коэффициент трения между шинами автомобиля и полотном шоссе $\mu = 0,3$? Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с. Ответ: $\approx 14,7$ м/с.



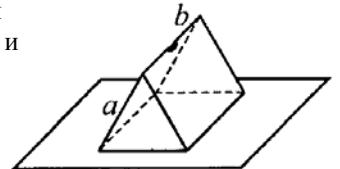
1.14. Открытый сосуд с водой, имеющий форму куба, закреплен на подвижной тележке. Объем воды $V = 0,8$ м³, длина ребра куба $L = 1$ м. С каким максимальным постоянным ускорением a , направленным горизонтально перпендикулярно боковой грани куба, может двигаться этот сосуд на тележке, чтобы вода не выливалась из него? Модуль ускорения свободного падения считать равным $g = 10$ м/с². Ответ: 4 м/с².

1.15. На краю гладкого стола покоится маленькая шайба. Скользящая по столу от его центра со скоростью v вторая шайба вдвое большей массы налетает на первую. Найти зависимость расстояния между шайбами от времени после столкновения в процессе полета. Соударение шайб считать абсолютно упругим и центральным. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ: $S = vt$.

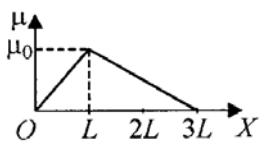
1.16. В закрепленном прямоугольном ящике, дно которого наклонено под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, удерживают прижатую к дну и верхней боковой стенке маленькую шайбу (см. рис.). Дно ящика изготовлено из двух разных материалов. Материал верхней половины дна шероховатый, а нижней — гладкий. После отпущения шайба соскальзывает вниз и абсолютно упруго ударяется о нижнюю боковую стенку. Найти коэффициент трения μ шайбы о шероховатую часть дна, если после удара шайба не доезжает до исходного положения на расстояние $0,5l$, где $2l$ — длина ящика. Ответ: $\approx 0,19$



1.17. На горизонтальном столе лежит полая треугольная призма массой m , изготовленная из листового металла (см. рис.). Основания призмы представляют собой правильные треугольники со стороной a . Две боковые грани призмы — прямоугольники со сторонами a и b ; нижняя грань отсутствует. Нижние ребра оснований и боковых граней призмы плотно (без зазора) прилегают к столу. Через отверстие в верхнем ребре в призму медленно наливают воду. До какой высоты h нужно заполнить водой призму, чтобы она оторвалась от стола? Плотность воды ρ . Ответ: $h = \sqrt{m\sqrt{3}/(\rho b)}$, при $m \leq \sqrt{3}\rho a^2 b/4$



1.18. Маленькая шайба, скользя по гладкой горизонтальной плоскости вдоль оси OX , попадает на шероховатый участок этой плоскости. Коэффициент сухого трения μ на этом участке изменяется так, как показано на рисунке. Максимальное значение μ равно μ_0 . Найти модуль v_0 начальной скорости шайбы, если она остановилась в точке $x_0 = 2L$. Ответ: $v_0 = \sqrt{5\mu_0 gL/2}$



1.19. Маленькая шайба находится на горизонтальной поверхности стола, состоящей из двух панелей: гладкой и шероховатой (см. рис.). Координатная ось OX направлена перпендикулярно стыку панелей.

Шайба скользит по гладкой панели параллельно оси OX и в некоторый момент времени попадает на шероховатую панель. Коэффициент трения между шайбой и шероховатой панелью возрастает по мере удаления от стыка панелей по линейному закону $\mu(x) = \alpha x$, где $\alpha = \text{const}$. Через какое время τ после попадания шайбы на шероховатую панель ее скорость уменьшится в 2 раза? Ускорение свободного падения g . Ответ: $\tau = \pi/(3\sqrt{\alpha g})$

