

Олимпиада «Покори Воробьевы горы – 2009». Очный тур

1. Дождевая капля, покинув облако на большой высоте, падает вертикально. Через некоторое время ее скорость стала равной по модулю 2 м/с . В этот момент модуль ускорения капли стал равным $8,4 \text{ м/с}^2$. Под каким углом к вертикали будет наклонен след, который эта капля оставит на боковом стекле автомобиля, движущегося прямолинейно по горизонтальной дороге со скоростью, модуль которой равен 12 км/ч ? Считайте, что действующая на каплю сила сопротивления воздуха прямо пропорциональна её скорости. Ответ: $\alpha = \arctg(10/7)$

2. Два груза, соединенные легкой пружиной жесткостью k , соскальзывают с плоскости, образующей угол α с горизонталью. При этом длина пружины остаётся неизменной и равной l . Масса нижнего груза равна m_1 а коэффициент его трения о плоскость равен μ_1 . Масса верхнего груза равна m_2 , а коэффициент его трения о плоскость равен μ_2 . Определите модуль ускорения грузов и длину пружины в недеформированном состоянии.

Ответ: $a = g \left[\sin \alpha - \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} \cos \alpha \right]$, $l_0 = l - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{(\mu_2 - \mu_1) g \cos \alpha}{k}$

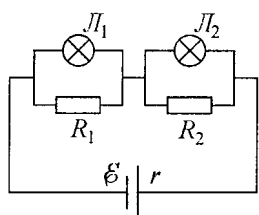
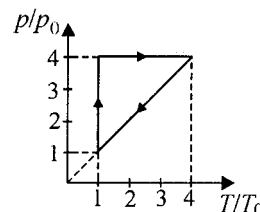
3. Маленький шарик массой m , подвешенный к потолку комнаты на невесомой и нерастяжимой нити, смещают так, чтобы нить была слегка натянута и образовывала с вертикалью угол $\alpha < 90^\circ$. Затем шарик отпускают без начальной скорости. Пренебрегая влиянием воздуха, определите модуль силы натяжения нити в тот момент, когда направление ускорения шарика и ось нити совпадают. Ответ: $F = (3 - 2 \cos \alpha) mg$

4. На горизонтальной крышке стола лежит кубик. Коэффициент трения кубика о крышку равен μ . Середины боковой грани кубика касается небольшой шарик, подвешенный к потолку на легкой нерастяжимой нити длиной L . Массы кубика и шарика одинаковы. Шарик отклонили от исходного положения так, чтобы нить была слегка натянута, образовывала с вертикалью угол α и располагалась в вертикальной плоскости, проходящей через центр кубика перпендикулярно его грани. Затем шарик отпустили без начальной скорости. Определить расстояние, на которое переместится кубик по крышке стола после удара шарика. Соударение шарика с кубиком считать абсолютно упругим. Ответ: $L(1 - \cos \alpha)/\mu$

5. В горизонтальной достаточно длинной гладкой трубе между двумя поршнями массой M каждый находится один моль идеального одноатомного газа. В остальных частях трубы создан вакуум. В некоторый момент времени абсолютная температура газа была равна T_0 , а поршни двигались навстречу друг другу со скоростями, модули которых равны v_1 и v_2 . Пренебрегая теплообменом газа с окружающими телами, найдите температуру T газа в тот момент, когда его давление станет максимальным. Процесс сжатия газа считайте равновесным. Ответ: $T = T_0 + \frac{M(v_1 + v_2)^2}{6R}$

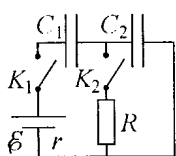
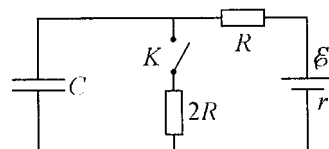
6. В цилиндре под поршнем содержится воздух с парами воды при температуре $t = 100^\circ \text{C}$ и нормальном атмосферном давлении. Относительная влажность воздуха $f = 80\%$. Определите установившееся в цилиндре давление после изотермического уменьшения объема влажного воздуха в $n = 2$ раза. Ответ: $p_k = p_a [1 + n(1 - f)] \approx 0,14 \text{ МПа}$

7. Цикл теплового двигателя, в котором в качестве рабочего тела используется некоторое количество одноатомного идеального газа, в координатах давление - температура имеет виде прямоугольного треугольника, показанного на рисунке. Определите КПД этого теплового двигателя. Ответ: $\eta = (6 - 2 \ln 4)/15 \approx 0,215$



8. В схеме, представленной на рисунке, лампы $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ рассчитаны на напряжения $U_1 = 2,5 \text{ В}$ и $U_2 = 6,3 \text{ В}$ и мощности $N_1 = 0,5 \text{ Вт}$ и $N_2 = 1,4 \text{ Вт}$ соответственно. ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока равны: $\mathcal{E} = 9 \text{ В}$, $r = 0,8 \text{ Ом}$. Чему равны сопротивления R_1 и R_2 , если обе лампы горят нормальным накалом? Ответ: $R_1 = 50 \text{ Ом}$, $R_2 = 226,8 \text{ Ом}$

9. В схеме, изображенной на рисунке, ключ K достаточно долгое время был замкнут. Какое количество теплоты выделится в сопротивлении R после размыкания ключа? Излучением пренебречь. Параметры элементов схемы даны на рисунке. Ответ: $Q_R = \frac{(R+r)RC}{2(3R+r)^2} \mathcal{E}^2$



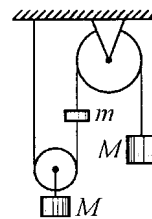
10. В показанной на рисунке схеме оба конденсатора были предварительно разряжены, а ключи разомкнуты. После замыкания ключа K_1 через достаточно большой промежуток времени замыкают ключ K_2 . Найти количество теплоты, которое может дополнительно выделиться в схеме после замыкания ключа K_2 . Параметры элементов указаны на схеме. Ответ: $\Delta Q = (C \mathcal{E})^2 / (2(C_1 + C_2))$

11. Квадратную рамку, изготовленную из тонкой жесткой проволоки, поместили в однородное магнитное поле так, чтобы её плоскость была перпендикулярна вектору индукции $\vec{B}$ магнитного поля. Длина стороны рамки равна a . С какой угловой скоростью нужно вращать рамку вокруг одной из ее сторон, чтобы амплитуда ЭДС в рамке была равна $\mathcal{E}$? Считать, что сопротивление рамки достаточно велико. Ответ: $\omega = \mathcal{E}/(Ba^2)$

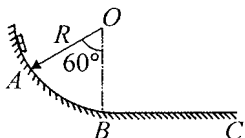
12. Тонкая прямая палочка размещена перпендикулярно главной оптической оси тонкой линзы так, что один из ее концов находится на этой оси. Линза дает действительное изображение палочки с увеличением k . Расстояние между палочкой и изображением, отсчитываемое вдоль оси линзы, равно d . Найти фокусное расстояние линзы. Ответ: $F = kd/(1 + k)^2$

1. Колесо радиусом R катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости. При этом центр колеса движется прямолинейно с постоянным ускорением $a_{\text{ц}}$. Найти модуль ускорения верхней точки колеса в момент времени, когда скорость центра колеса будет равна $v_{\text{ц}}$. Ответ: $a = \sqrt{4a_{\text{ц}}^2 + (v_{\text{ц}}^2 / R)^2}$

2. На гладкой невесомой нерастяжимой нити, один конец которой прикреплен к потолку, подвешен блок. Другой конец этой нити прикреплен к грузу массой m . К этому грузу прикреплена вторая такая же нить, переброшенная через закрепленный блок. К свободному концу второй нити прикреплен груз массой M , как показано на рисунке. Масса подвижного блока с подвешенным к его оси грузом равна M . Отрезки нитей, не лежащие на блоках, вертикальны. Первоначально груз массой M , прикрепленный ко второй нити, удерживали неподвижным, а затем его отпустили. Найти ускорение a_1 подвижного блока для моментов времени, когда грузы еще не касаются блоков. Ответ: $a_1 = (2m - M)g / (5M + 4m)$



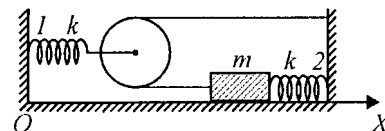
3. Профиль снежной горки, показанный на рисунке, представляет собой дугу окружности радиусом $R = 10$ м с плавным выходом на горизонтальную плоскость BC . Поверхность горки гладкая, а горизонтальная плоскость шероховатая. На каком расстоянии l (в точке C) от конца горки (точки B) остановятся съехавшие с горки санки, если в точке A их полное ускорение было равно по модулю ускорению свободного падения g , а коэффициент трения санок о плоскость $\mu = 0,15$? Радиус дуги окружности, проведенный в точку A , образует с вертикалью угол 60° . Ответ: $l = 3R / (4\mu) = 50$ м



4. В кабине лифта, движущейся вертикально вниз с постоянной скоростью u , роняют шарик. В момент подлета шарика к полу его скорость относительно Земли вертикальна и равна v . Соотношение скоростей u и v таково, что после абсолютно упругого удара о пол шарик относительно Земли продолжает двигаться вниз. Определите максимальное расстояние h между шариком и полом кабины лифта после удара. Ответ: $h = (v - u)^2 / (2g)$

5. Тонкая неоднородная палочка постоянного сечения S и длиной L , центр тяжести которой находится на расстоянии $0,25L$ от одного из ее концов, лежит на горизонтальном дне сосуда. Масса палочки m . Сосуд заполняют жидкостью. При какой плотности ρ жидкости палочка в сосуде сможет принять вертикальное положение при достаточно высоком уровне жидкости? Ответ: $2m / (LS) > \rho > m / (2LS)$

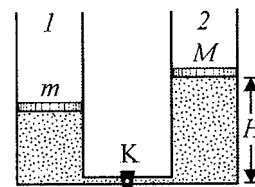
6. В системе, изображенной на рисунке, брусок массой m лежит на гладкой горизонтальной плоскости, а пружины l и 2 сильно растянуты. Оси пружин и нерастяжимые нити горизонтальны и лежат в одной вертикальной плоскости с центром масс бруска. Коэффициенты жесткости пружин одинаковы и равны k . Брусок смещают на малое расстояние вдоль оси OX . Определить период колебаний бруска после его отпускания. Массой блока, пружин, нитей и трением пренебречь.



Ответ: $T = 4\pi \sqrt{\frac{m}{5k}}$

7. Моль гелия при нагревании получил количество теплоты Q . При этом давление газа увеличивалось пропорционально его объему, а среднеквадратичная скорость теплового движения его атомов возросла в n раз. Найти абсолютную температуру T_0 газа перед началом нагревания. Ответ: $T_0 = Q / (2(n^2 - 1)R)$

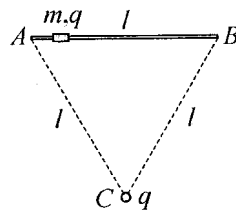
8. В гладком цилиндре 1 под поршнем массой $m = 5$ кг находится идеальный газ. Цилиндр 1 соединен трубкой, снабженной краном, с таким же цилиндром 2 , как показано на рисунке. Во втором цилиндре под поршнем массой $M = 10$ кг находится такой же газ, как и в цилиндре 1 . В начальном состоянии кран K закрыт, а поршень в цилиндре 2 находится на высоте $H = 35$ см от дна. На какое расстояние Δh переместится поршень в цилиндре 1 после открывания крана? Температура газа в первом цилиндре в течение всего процесса поддерживается постоянной и равной $T_1 = 300$ К, а во втором цилиндре — постоянной и равной $T_2 = 350$ К. Объемом трубки с краном пренебречь, атмосферное давление не учитывать. Толщина поршней больше диаметра соединительной трубки. Ответ: $\Delta h = MT_1 H / (mT_2) = 60$ см



9. Определенное количество аргона изохорически нагрели до некоторой температуры. Затем абсолютную температуру газа увеличивали пропорционально объему по закону $T = \alpha V$ до такой величины, что при последующем охлаждении по закону $T = \beta V^2$ газ перешел в начальное состояние. Найти КПД указанного цикла, зная начальный объем газа V_1 и постоянные коэффициенты α и β . Ответ: $\eta = (\alpha - \beta V_1) / (5\alpha + 3\beta V_1)$

10. Масса влажного воздуха, занимающего объем $V = 1$ л при температуре $t = 27^\circ\text{C}$, давлении $p = 86,5$ кПа и относительной влажности $f = 0,4$ равна $m = 1$ г. Определить давление насыщенных паров при заданной температуре. Считать молярную массу сухого воздуха равной $\mu_{\text{в}} = 29$ г/моль, а молярную массу паров — $\mu_{\text{п}} = 18$ г/моль. Ответ: $p_{\text{п}} = (pm_{\text{в}}V - mRT) / ((\mu_{\text{в}} - \mu_{\text{п}})fV) \approx 3,52$ кПа

11. Маленькая муфта массой m , имеющая заряд q , может скользить без трения по гладкому горизонтальному непроводящему стержню AB длиной l (см. рис.). В точке C , расположенной на расстоянии l от точек A и B , закреплен маленький шарик, на котором помещен такой же заряд q . Первоначально муфту удерживают в точке A . Какую минимальную по модулю скорость $v_{\min}$ нужно сообщить муфте, чтобы она могла достичь точки B ? Потерями энергии на излучение пренебречь. Электрическая постоянная ϵ_0 .



Ответ: $v_{\min} = \frac{q}{\sqrt{2\pi\epsilon_0 ml}} \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}} - 1$

12. На гладкой горизонтальной непроводящей плоскости с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 1$, расположенной в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией B , удерживают на расстоянии L друг от друга две маленькие одинаковые шайбы. Масса каждой шайбы равна m . Шайбы имеют равные по модулю, но противоположные по знаку заряды. В некоторый момент времени шайбы одновременно отпускают без начальной скорости. Найти минимальное расстояние $L_{\min}$ между шайбами, зная, что в процессе движения они не сталкиваются. Потерями энергии на излучение пренебречь. Ответ: $L_{\min} = \frac{1}{2}L \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4m}{\pi\epsilon_0 B^2 L^3}} \right]$

13. На цилиндрическую проволочную катушку надето проводящее кольцо с малой индуктивностью, покрытое изоляцией. Плоскость кольца перпендикулярна оси катушки. При равномерном нарастании тока в катушке от нуля до $I_1 = 5$ А за время $t_1 = 9$ с в кольце выделяется количество теплоты $Q_1 = 0,5$ Дж. Какое количество теплоты Q_2 выделится в кольце, если ток в катушке будет равномерно возрастать от нуля до $I_2 = 10$ А за время $t_2 = 3$ с? В обоих случаях кольцо удерживают неподвижным относительно катушки. Ответ: 6 Дж

14. Контур состоит из конденсатора емкостью $C = 0,1$ мкФ и катушки индуктивностью $L = 10$ мкГн. Сопротивление катушки равно $R = 0,05$ Ом. Катушка и конденсатор последовательно подключены к источнику гармонического напряжения, частота которого равна собственной частоте контура. Определить среднюю мощность, потребляемую контуром от источника, если амплитуда напряжения на конденсаторе остается практически неизменной и равной $U_0 = 20$ В. Ответ: 0,1 Вт

15. К тонкой собирающей линзе со скоростью v , образующей малый угол α с ее главной оптической осью, приближается точечный источник света S . Траектория движения источника пересекает главную оптическую ось в точке, находящейся на расстоянии c от линзы, превышающем её фокусное расстояние F . Найти модуль и направление скорости u движения изображения S_1 этого источника в тот момент, когда он находился на расстоянии $a > F$ от линзы. Ответ: $u \approx vF^2/(a - F)^2$

16. На закрепленный зеркальный шар радиусом R падает узкий параллельный пучок света мощностью N . Ось падающего пучка света проходит на расстоянии a от центра шара. Найти силу F , с которой свет действует на шар.

Скорость света c . Ответ: $F = 2 \frac{N}{c} \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}$