

**Первый этап академического соревнования «Профессор Н.Е. Жуковский»
олимпиады «Шаг в будущее» 2010 г.**

Математика

1. Двое рабочих, работая вместе, могут закончить работу за 21 ч. Если же сначала 70% работы выполнит один из них, а оставшуюся часть – другой, то вся работа будет выполнена за 42 ч. За сколько часов каждый рабочий может выполнить всю эту работу?

2. Решите уравнение

$$\cos 2x + 5 \sin x = 3$$

и укажите его корни, лежащие в промежутке $[-3\pi/2; \pi/2]$.

3. Пятый член геометрической прогрессии равен 48. Каким должен быть знаменатель этой прогрессии, чтобы сумма третьего и четвертого членов была наименьшей?

4. Решите неравенство

$$\log_{1/2} \left(2 + \frac{4}{x} \right) > 0.$$

5. Решите неравенство

$$\frac{6-x}{\sqrt{x-1}-1} \leq 1.$$

6. Найдите множество значений функции

$$f(x) = 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} \sin(x^2 + 2x + 2) \right).$$

7. Площадь прямоугольного треугольника равна 12, а его гипотенуза $2\sqrt{13}$. Найдите косинус острого угла между медианами данного треугольника, проведёнными к катетам.

8. Какую наибольшую площадь может иметь треугольник, ограниченный осью, Ox прямой $x = 3/2$ и касательной к графику функции $y = x^2$ в точке с абсциссой x_0 , если $0 < x_0 < 3/2$?

9. Укажите все значения параметра a при которых уравнение

$$(x-a)^2 + a = \sqrt{20 - 16 \frac{|x|}{x}}$$

имеет ровно два различных корня. Найдите эти корни при указанных a .

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник, ABC все стороны которого равны 4, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины стороны основания AC и бокового ребра TB и параллельной медиане BD боковой грани, BTC если расстояние от вершины пирамиды T до секущей плоскости равно $1/2$.

Ответы

1. (42, 42) или (30, 70).

2. $\left\{ -\frac{7\pi}{6}; \frac{\pi}{6} \right\}$.

3. $q = -2$.

4. $x \in (-4; -2)$.

5. $x \in [1; 2) \cup [5; +\infty)$.

6. $E(f) = [\sqrt{2}; 2]$.

7. $\frac{13}{5\sqrt{10}}$.

8. 1.

9. 2 решения уравнение имеет

при $a \in (-\infty; -3) \cup (-2; 1]$.

При $a \in (-\infty; -3)$ $x = a \pm \sqrt{6-a}$.

При $a \in (-2; 1)$ $x = a + \sqrt{2-a}$,

$x = a - \sqrt{6-a}$.

10. $6/\sqrt{5}$.

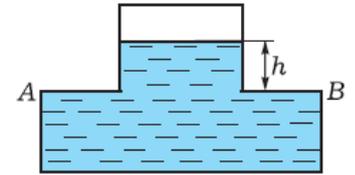
**Второй этап академического соревнования «Профессор Н.Е. Жуковский»
олимпиады «Шаг в будущее» 2010 г.**

Физика

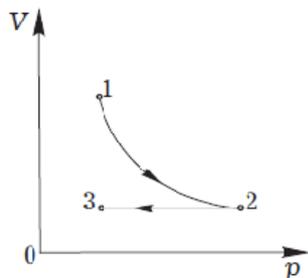
1. Алюминиевое кольцо подвешено на двух нитях. Южный полюс магнита приближается с некоторой скоростью к кольцу, двигаясь вдоль его оси перпендикулярно плоскости кольца. Будет ли при этом кольцо притягиваться к магниту или отклоняться от него? Ответ поясните.

2. На столе лежат стопкой 10 одинаковых книг. В каком случае нужно приложить меньшую силу: чтобы сдвинуть восемь верхних книг или вытянуть из стопки седьмую книгу сверху? Ответ обосновать.

3. Открытый бак, состоящий из двух соосных цилиндров диаметрами d и $3d$, заполнен жидкостью плотности ρ , как показано на рисунке. Бак стоит на полу лифта, который опускается вниз с ускорением $a = 0,5g$. Определите силу давления жидкости на горизонтальную поверхность AB , соединяющую оба цилиндра. Атмосферное давление равно p_0 , h дано.



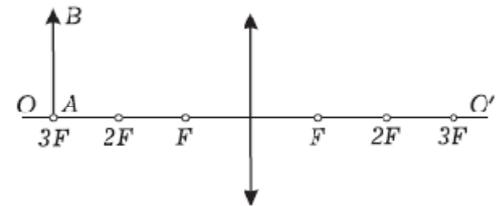
4. Груз 1 массы m подвешен через пружину жёсткости k на невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок, соединённый с бруском 2, лежащим на горизонтальной плоскости. В начальный момент груз m удерживается так, что пружина находится в ненапряжённом состоянии. Затем его отпускают без начальной скорости. Найдите минимальную массу M бруска 2, при которой он ещё будет оставаться неподвижным. Коэффициент трения между бруском 2 и плоскостью $\mu = 0,2$. Массой пружины, нити, блока и трением в нём пренебречь.



5. Один моль идеального одноатомного газа сначала изотермически сжали ($T_1 = 300$ К). Затем изохорно охладили, понизив давление в 3 раза по сравнению с давлением в точке 2 (см. рис.). Какое количество теплоты Q газ отдал на участке 2–3?

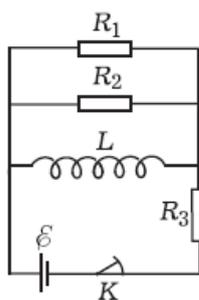
6. По кольцу радиуса R равномерно распределён заряд q . Определите потенциал φ в точке A , находящейся на оси, перпендикулярной плоскости кольца и отстоящей от его центра на расстоянии $h = 2,5R$.

7. Предмет располагается перед собирающей линзой, как показано на рисунке. Линзу разрезали по оси OO_1 . Нижнюю половину линзы удалили, а верхнюю половину сдвинули вверх по отношению к предмету, как показано на рисунке. Постройте изображение предмета в оставшейся верхней половине линзы.



8. Найдите максимальный потенциал φ , до которого может зарядиться удалённый от других тел вольфрамовый шарик при облучении его электромагнитным излучением с длиной волны $\lambda = 0,1$ мкм? Работа выхода для вольфрама $A = 4,5$ эВ.

9. В электрической цепи, представленной на рисунке, ключ K в начальный момент замкнут и по цепи идёт постоянный ток. Какое количество теплоты выделится в резисторе R_1 после размыкания ключа? Параметры элементов цепи: индуктивность катушки равна L_1 , $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, $R_3 = R/3$. ЭДС источника тока равна \mathcal{E} . Активным сопротивлением катушки и сопротивлением источника тока пренебречь.



10. На гладкой горизонтальной поверхности массивной плиты покоится клин массы M . На грань, составляющую с горизонтом угол $\alpha = 45^\circ$, вертикально падает шарик массы m и ударяется о клин со скоростью v_0 . В результате клин начинает двигаться по плите. Определите скорость клина после удара. Время удара мало, удар считать абсолютно упругим.

Ответы

1. Кольцо будет отклоняться.

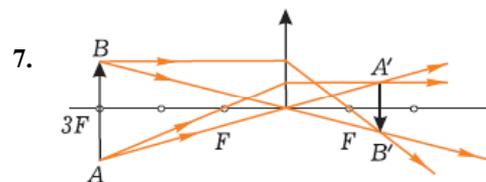
2. Меньшую силу $F_1 = 8\mu mg$ нужно приложить, чтобы сдвинуть восемь верхних книг.

3. $F = 2\pi d^2(p_0 + 0,5\rho gh)$.

4. $M = 10m$.

5. $|Q_{23}| \approx 2,5$ кДж.

6. $\varphi = \frac{q\sqrt{29}}{58\pi\epsilon_0 R}$.



7.

8. $\varphi_{\max} = \frac{h \frac{c}{\lambda} - A}{e} \approx 7,92$ В.

9. $Q_1 = 3 \frac{L\mathcal{E}^2}{R^2}$.

10. $u = \frac{2v_0 m}{2M + m}$.